周期运动

简谐振动和阻尼

周期运动

周期性的数学描述

对一个体系：

$\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots\}$ $\qquad$ $Q_i = Q_i(t + \Delta t)$ $\qquad$ Δt 有限大，且对所有参数适用

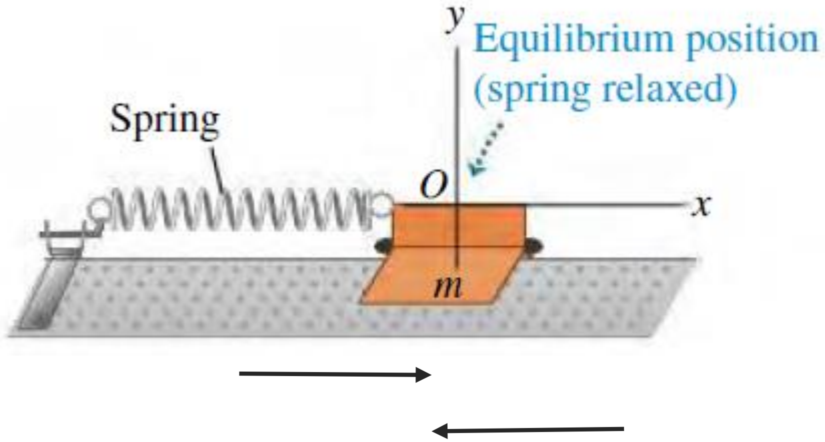
对一个质点：

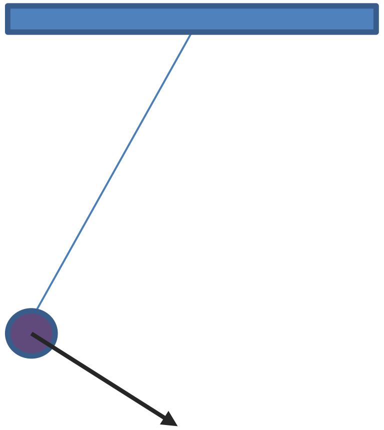
$\{\mathrm{r}, v, a, E\}$ $\qquad$ $r = r(t + \Delta t)$ $\qquad$ Δt 有限大，且对所有参数适用

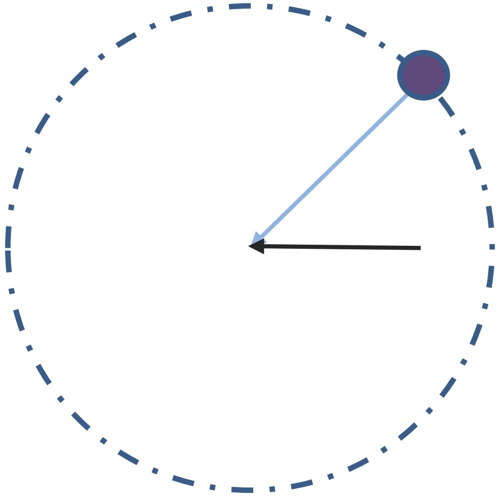
$r = r(t + \Delta t) \rightarrow r = r(t + 2\Delta t) \rightarrow r = r(t + n\Delta t)$

周期 T： Δt -- 秒 s
频率 f： $1/\Delta t$ -- 赫兹 Hz = cycle/s
角频率： 2πf -- rad/s

周期运动







周期运动：受一个指向平衡位置的，与偏移平衡位置的“距离”大小**相关**的力。

简谐运动：受一个指向平衡位置的，与偏移平衡位置的“距离”大小**成正比**的力。

简谐运动

Restoring force exerted by an **ideal spring** $F_x = -kx$

x-component of force

Displacement

Force constant of spring

Equation for simple harmonic motion $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$

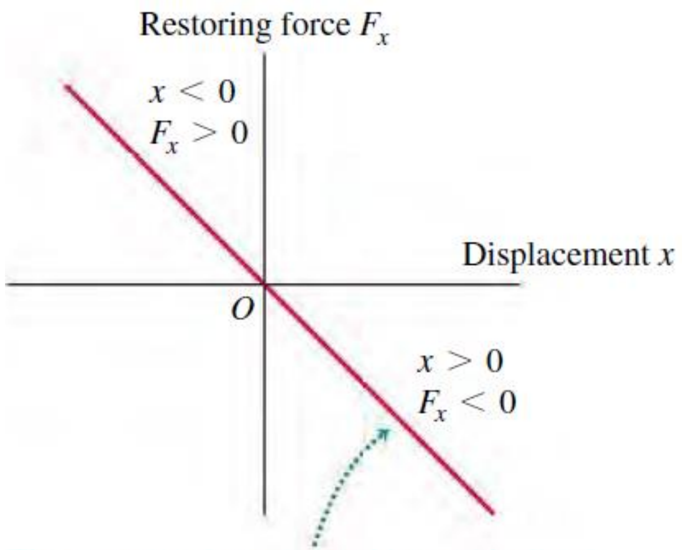
x-component of acceleration

Force constant of restoring force

Displacement

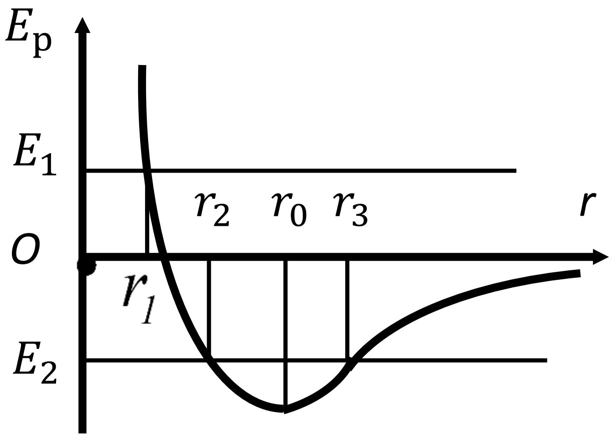
Second derivative of displacement

Mass of object



The restoring force exerted by an idealized spring is directly proportional to the displacement (Hooke's law, $F_x = -kx$): the graph of F_x versus x is a straight line.

$E = E\,(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots) \rightarrow E - E_0 = a_0 + a_1\,(Q_1 - Q_{10}) + a_2\,(Q_1 - Q_{10})\text{^}2 + \cdots.$



a_0: 定义为0

a_1: 平衡点一阶微分系数为0

第一个重要项： a_2 : dE/dQ = F; dF/dQ ~ a_2

简谐运动的解

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

令： $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \phi)}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$= A\cos(\omega t + \varphi + \omega\frac{2\pi}{\omega})$$

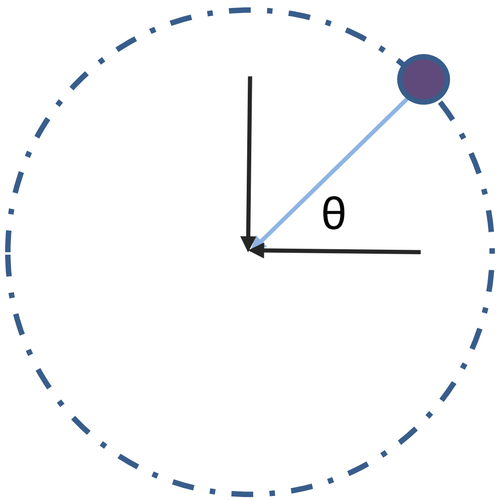
周期 T： Δt -- $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

频率 f： $1/\Delta t$ -- $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

角频率：$2\pi f$ -- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

注意：周期、频率和A无关！

圆周运动-分解



$$\vec{a} = -\vec{r}\omega^2 \quad \begin{cases} a_x = -r\omega^2\cos(\theta) = -\omega^2 x \\ a_y = -r\omega^2\sin(\theta) = -\omega^2 y \end{cases}$$

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \quad \begin{cases} x = r\cos(\theta) = rcos(\omega t) \\ y = r\,sin(\theta) = rcos(\omega t - \pi/2) \end{cases}$$

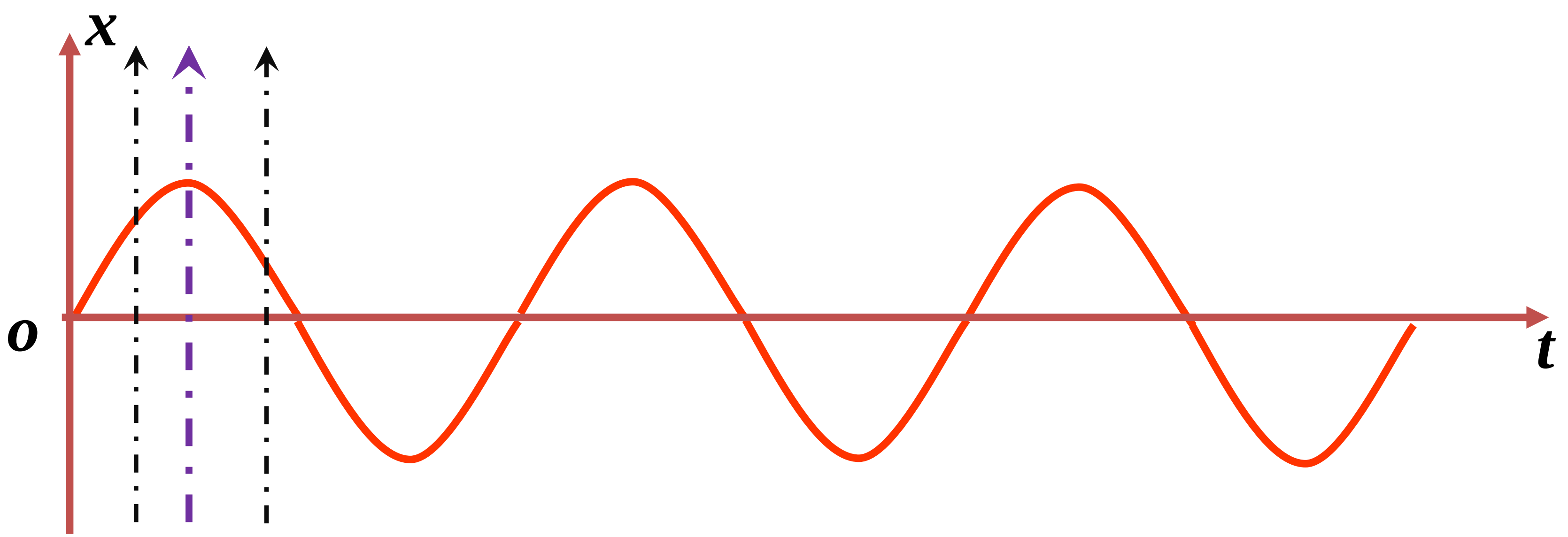
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x \Longrightarrow \ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{m}\vec{r}$$

线性方程，线性叠加

简谐运动的解 - 相位

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\theta)}$$

$\theta = \omega t + \varphi$ t 时刻, 振动的相或相位



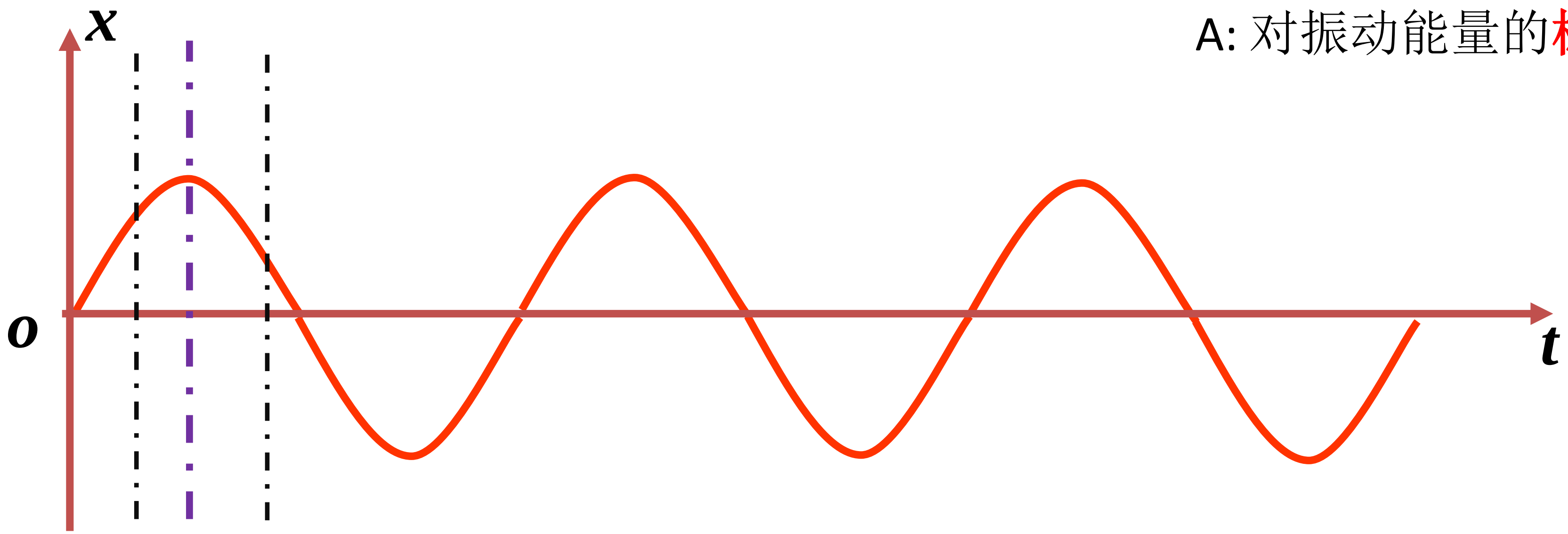
简谐运动的解 - 振幅

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \qquad \boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

X_{max} = A 对应 v = 0

能量守恒 → X_{max}的势能 = 总机械能

A: 对振动能量的**标度**



简谐振动的动力学模型

二阶线性常微分方程 $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

通解的几种形式：

$x = A\cos(\omega t + \phi)$ A振幅，ω角频率，φ初相位。其中A，φ为待定常数

$x = A'\cos(\omega t) + B'\sin(\omega t)$ A’, B’振幅，ω角频率。其中A’，B’为待定常数

$x = \mathrm{Re}(A'' e^{i\omega t} + B'' e^{-i\omega t})$ A’’, B’’振幅，ω角频率。其中A’’，B’’为待定复常数

这几种通解形式彼此等价，但是有不同的物理含义和用途。

振动状态和振动能量

位置： $x = A\cos(\omega t + \phi)$

振动速度： $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$

$= v_\mathrm{m}\cos(\omega t + \phi + \dfrac{\pi}{2})$ 其中： $v_\mathrm{m}=\omega A$ 称为“速度振幅”

振动加速度： $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$

$= a_\mathrm{m}\cos(\omega t + \phi \pm \pi)$

其中： $a_\mathrm{m}=\omega^2 A$ 称为“加速度振幅”

振动状态和振动能量

振子动能：$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

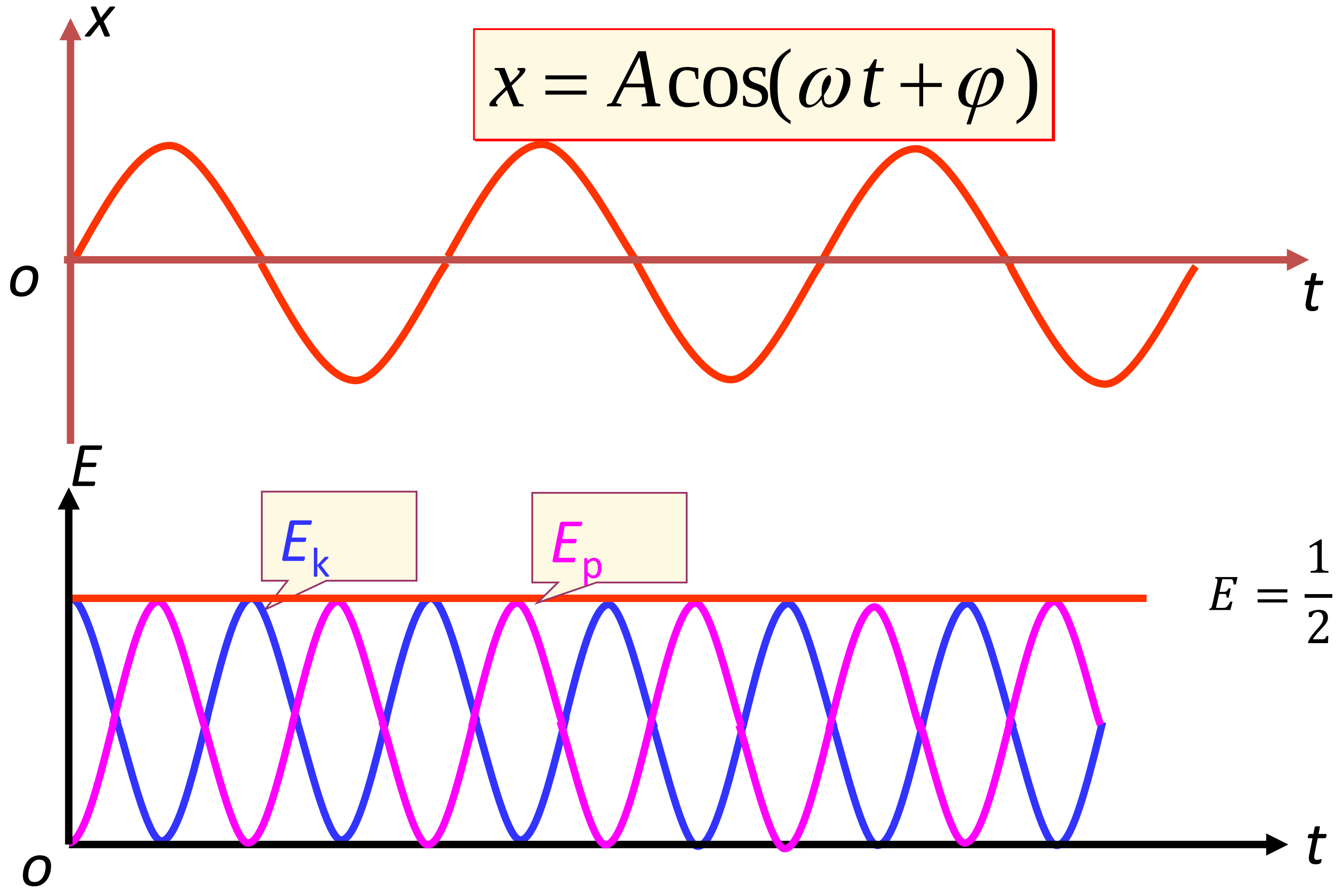
振子势能：$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

总能量：$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}}$$

$\because m\omega^2 = k$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{m}}}^2}$$

振动状态和振动能量



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

➢ 振子在振动过程中，动能和势能分别随时间变化，

但任一时刻总机械能保持不变。

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

➢ 动能和势能的变化频率是弹簧振子振动频率的两倍。

➢ 谐振动的总能量与振幅的平方成正比。（适合于任何谐振系统）

角振动 – 手表

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Rotational analog of Newton's second law for a rigid body:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

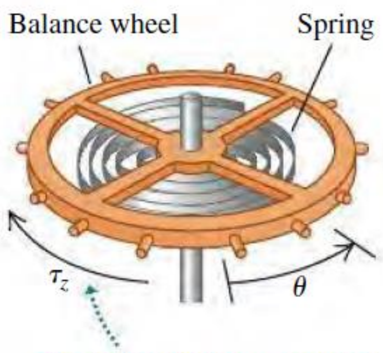
Net torque on a rigid body about z-axis

Moment of inertia of rigid body about z-axis

Angular acceleration of rigid body about z-axis

$$\alpha_z = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

如果力矩τ正比于偏移平衡的θ角大小？



The spring torque τ_z opposes the angular displacement θ.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

Angular simple harmonic motion

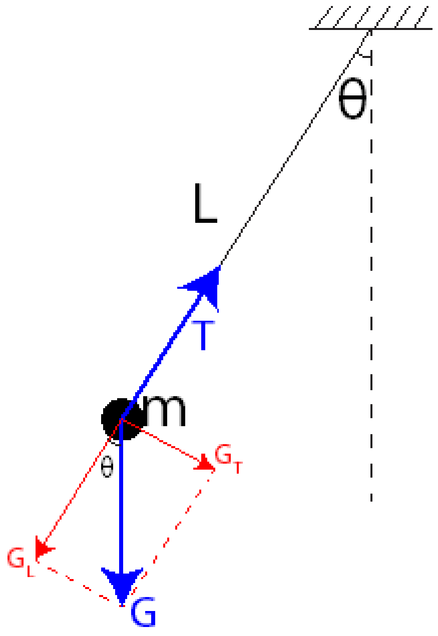
$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{and} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

Angular frequency

Frequency

Torsion constant divided by moment of inertia

单摆与微振动近似



受力分析：

切向合力为 $G_T = mg\sin\theta$

法向合力为 $T - G_L = T - mg\cos\theta$

运动学分析：

切向加速度为$L\ddot{\theta}$，法向加速度为$L\dot{\theta}^2$

切向$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

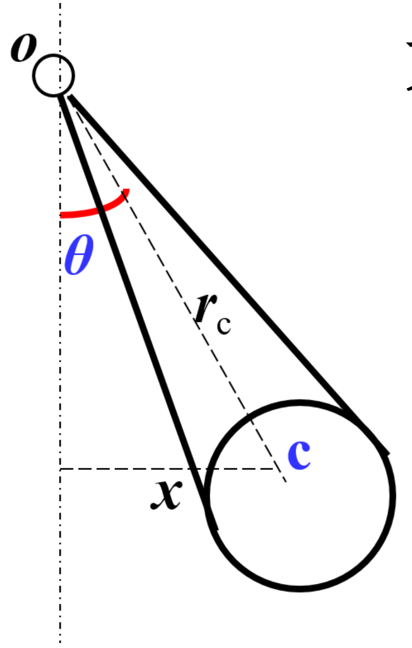
因此$g sin\theta = -L\ddot{\theta}$ 令 $\frac{g}{L} = \omega^2$ ⇒ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\sin\theta$

当振动很小的时候（角度很小） 由： $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$

由于θ很小，略去θ^3以上各项，则$\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$ 这与弹簧振子的动力学方程形式相同

刚体摆动与微振动近似



如图所示，一刚体绕过*o*的垂直于纸面的轴转动，满足转动定律：

$$-mgr_c\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

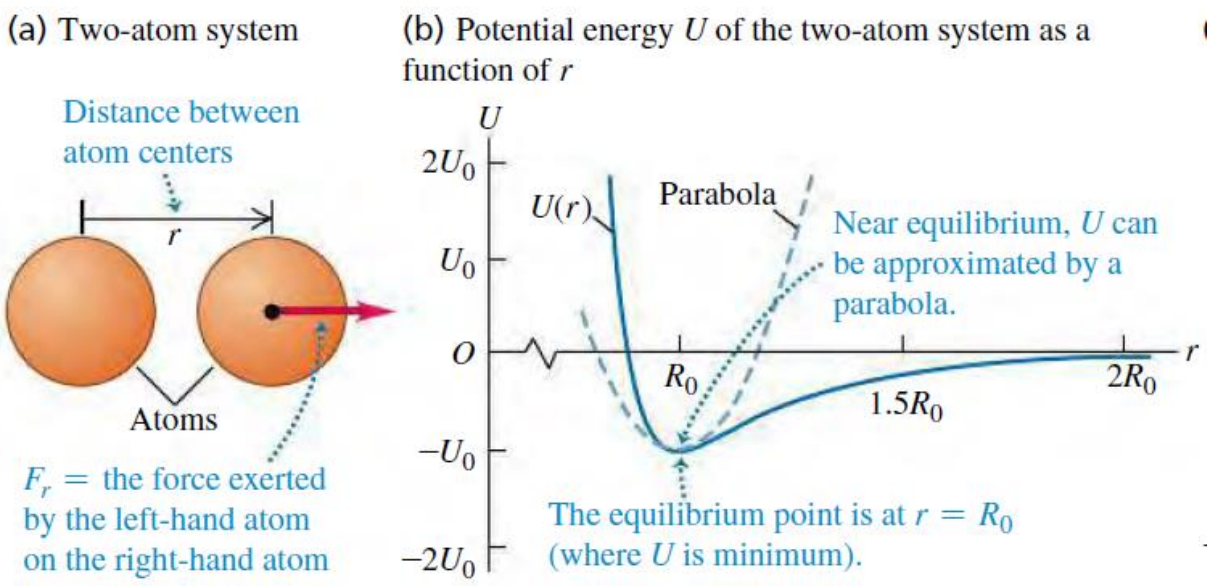
式中负号表示重力矩方向恰与角 θ 的正方向相反。

令：$\omega^2 = \frac{mgr_c}{I}$ 得：$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\sin\theta = 0$

微振动近似后 $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$ 与弹簧振子的动力学方程形式相同

说明了简谐运动的普遍性

分子振动



$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right]$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^{6}}{r^{7}}\right] = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^{7}\right]$$

小量偏移： $x = r - R_0$

$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{R_0 + x}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0 + x}\right)^{7}\right]$$

$$= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\frac{1}{(1 + x/R_0)^{13}} - \frac{1}{(1 + x/R_0)^{7}}\right]$$

$$\boxed{F_r} \approx 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(1 + (-13)\frac{x}{R_0}\right) - \left(1 + (-7)\frac{x}{R_0}\right)\right] = \boxed{-\left(\frac{72U_0}{R_0^2}\right)x}$$

简谐振动的动力学模型

二阶线性常微分方程 $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

通解的几种形式：

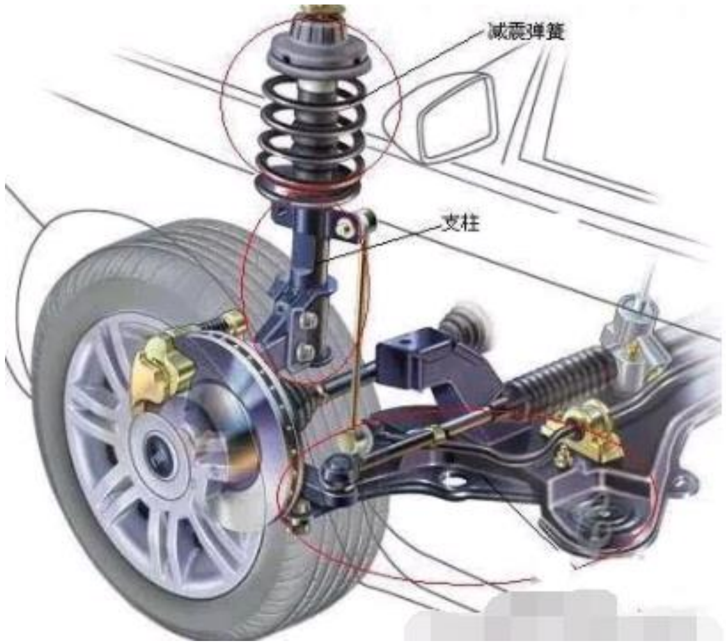
$x = A\cos(\omega t + \phi)$ A振幅，ω角频率，φ初相位。其中A，φ为待定常数

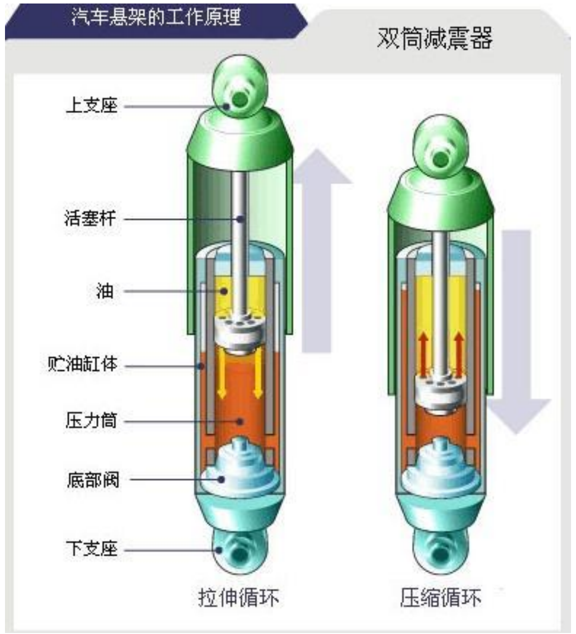
$x = A'\cos(\omega t) + B'\sin(\omega t)$ A’, B’振幅，ω角频率。其中A’，B’为待定常数

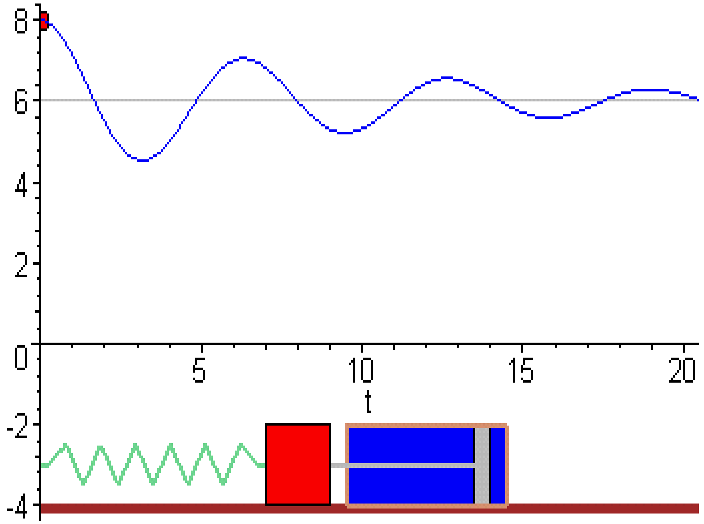
$x = \mathrm{Re}(A'' e^{i\omega t} + B'' e^{-i\omega t})$ A’’, B’’振幅，ω角频率。其中A’’，B’’为待定复常数

这几种通解形式彼此等价，但是有不同的物理含义和用途。

振动能量耗散--阻尼 damping







阻尼震动

阻尼跟速度有关

$$F=-\gamma v=-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\underbrace{-kx}_{\text{线性回复力}}\underbrace{-\gamma v}_{\text{阻力}}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

令： $\omega_0^2=\dfrac{k}{m},\quad 2\delta=\dfrac{\gamma}{m}$

δ 称为阻尼系数：注意和Sears书里用的符号不同。

ω_0与δ量纲相同

动力学方程： $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+{\omega_0}^2x=0$$

阻尼项的效果

考虑简化的情况： $\omega_0 = 0$

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} \quad \text{即} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} = 0$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\delta v \qquad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -2\delta\mathrm{d}t$$

两边同时积分得： $\ln v - \ln v_0 = -\,2\delta t \Rightarrow v = v_0 e^{-2\delta\cdot t}$

再次积分得 $x = \dfrac{v_0}{2\delta} + x_0 - \dfrac{v_0}{2\delta}e^{-2\delta t}$

速度，位移呈指数衰减 $e^{-2\delta\cdot t}$

阻尼振动的动力学方程

动力学方程： $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = 0$

$\delta = 0, \omega_0 \neq 0$ ⇒ **简谐振动** $e^{i\omega_0 t}$或$e^{-i\omega_0 t}$

$\delta \neq 0, \omega_0 = 0$ ⇒ **位移指数衰减** $e^{-2\delta \cdot t}$

考虑引入**试探解** $e^{\gamma t}$ 其中γ为复数

代入方程后得到

$$(\gamma^2 + 2\delta\gamma + \omega_0^2)e^{\gamma t} = 0 \Rightarrow \gamma^2 + 2\delta\gamma + \omega_0^2 = 0$$

阻尼振动的解

我们讨论**特征方程** $\gamma^2+2\delta\gamma+\omega_0^2=0$ 解的情况

$\gamma^2+2\delta\gamma+\delta^2=\delta^2-\omega_0^2$ 讨论判别式$\Delta=\delta^2-\omega_0^2$的正负性

1) $\Delta>0$, 即$\delta>\omega_0$(**过阻尼**)

特征方程的两个实数根分别为 $r_1=-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$，$r_2=-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$

方程通解为

$$Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}=e^{-\delta t}(Ae^{t\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}+Be^{-t\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}})$$

阻尼较大时 δ>ω₀，质点缓慢回到平衡位置，不作往复运动。

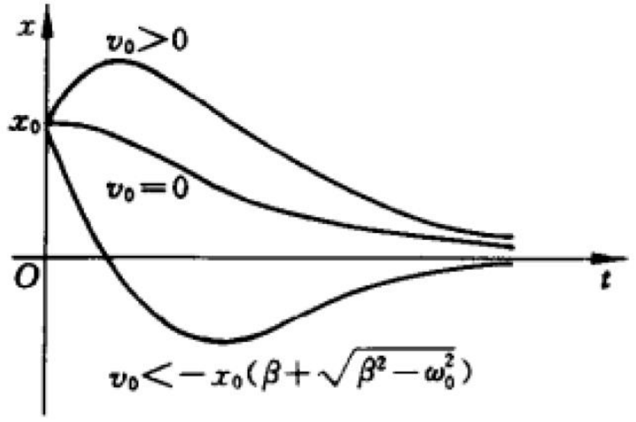
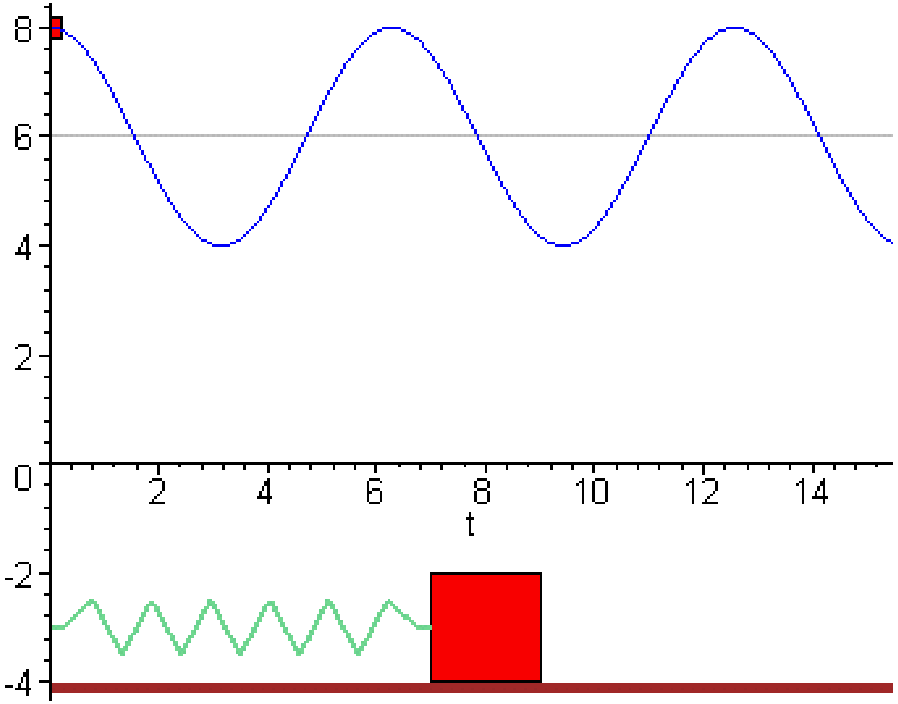
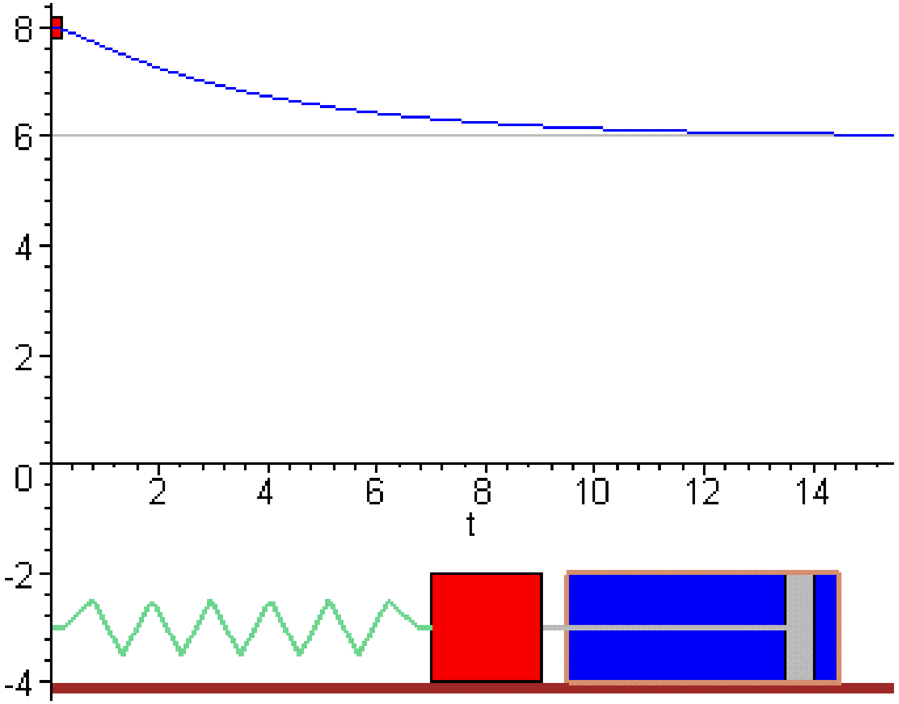


图 7-43 过阻尼

过阻尼振动





阻尼振动的动力学方程的解

2) Δ=0, 即$\delta=\omega_0$(临界阻尼)

特征方程只有一个实数根分别为$r_1=r_2=-\delta$

因此找到一个解为$e^{-\delta t}$，猜测另一个独立的解为$te^{-\delta t}$。怎么猜的？

方程通解为$Ae^{-\delta t}+Bte^{-\delta t}=e^{-\delta t}(A+Bt)$

当（ $\delta=\omega_0$ ）时，为“临界阻尼”情况, 是质点不作往复运动的一个极限

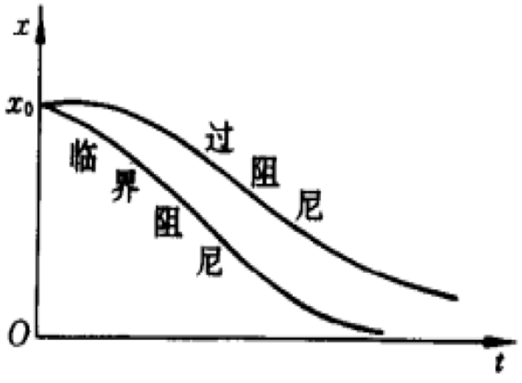
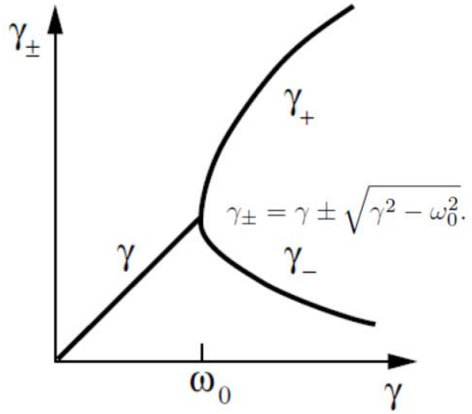
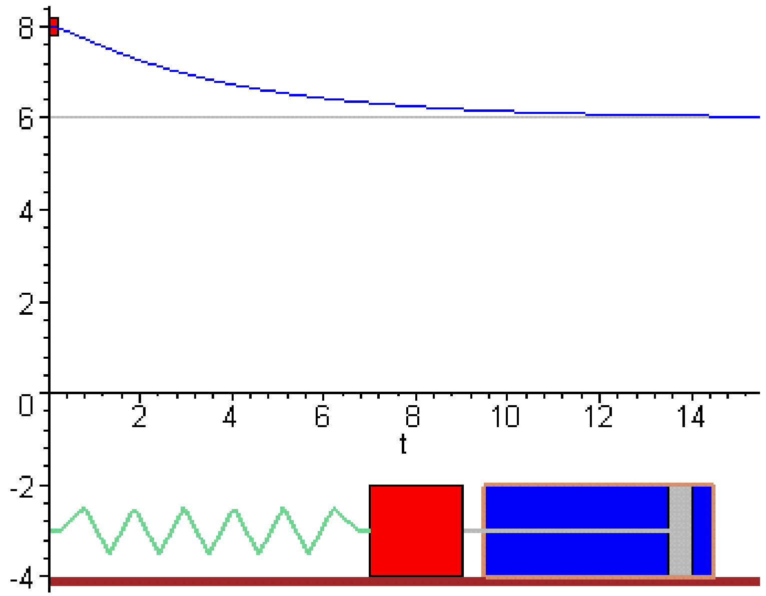


图 7-44 临界阻尼

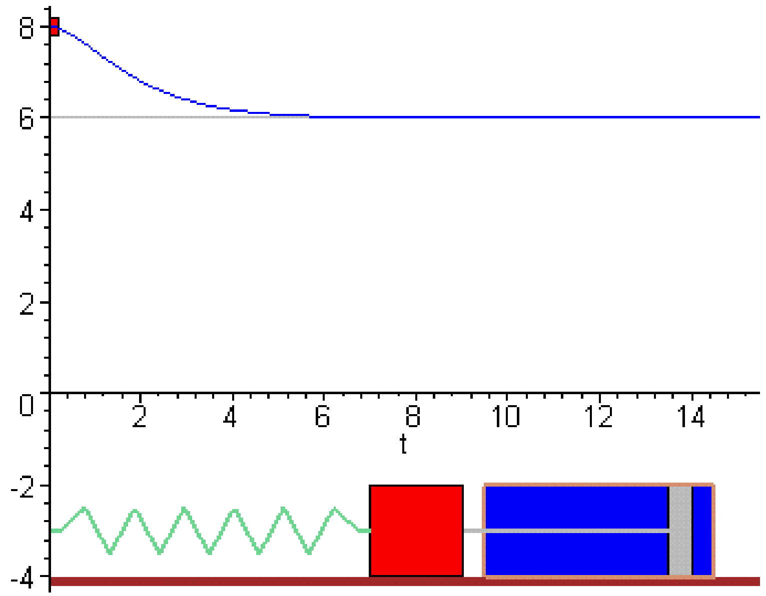


临界阻尼时振幅衰减最快

临界阻尼振动



过阻尼



临界阻尼

阻尼振动的动力学方程的解

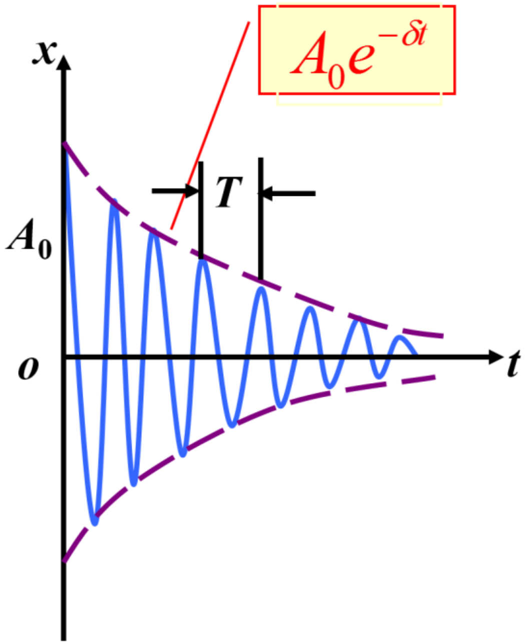
3) Δ<0, 即$\delta<\omega_0$(低阻尼)

特征方程的两个复数根分别为 $r_1=-\delta+i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$，$r_2=-\delta-i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$

方程通解为 $Ae^{r_1 t}+Be^{r_2 t}=e^{-\delta t}(Ae^{it\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}+Be^{-it\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}})$ （A,B为复数，有物理意义的是解的实数部分）

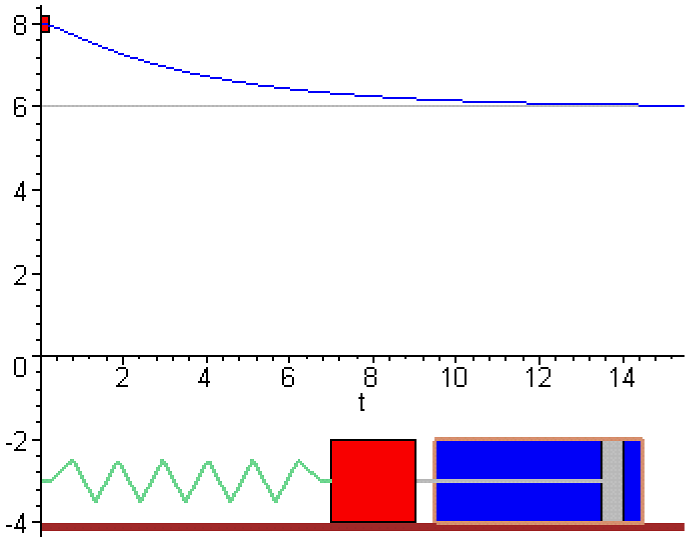
将其组合出我们熟悉的cos(ωt),sin(ωt)的形式，我们得到方程的另一个形式通解为

$$A'e^{r_1 t}+B'e^{r_2 t}=e^{-\delta t}\left(A'\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\right)+B'\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\right)\right)$$

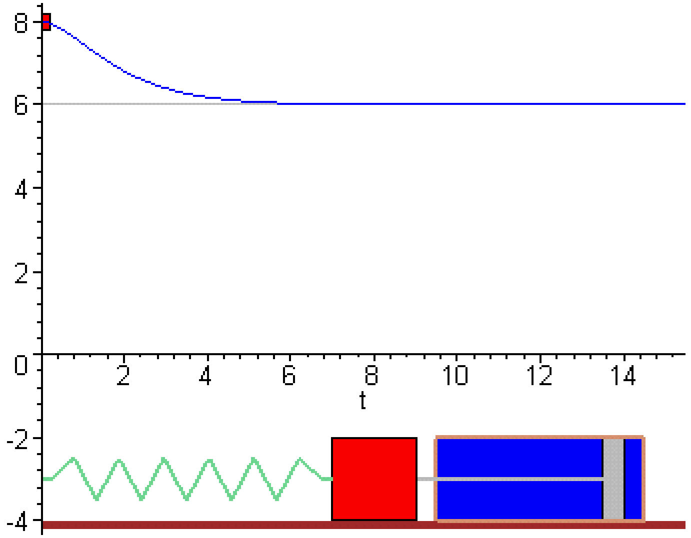


阻尼较小时（ $\delta<\omega_0$ ），振动为减幅振动，振幅 $Ae^{-\delta t}$ 随时间按指数规律迅速减少。阻尼越大，减幅越迅速。振动周期大于自由振动周期。

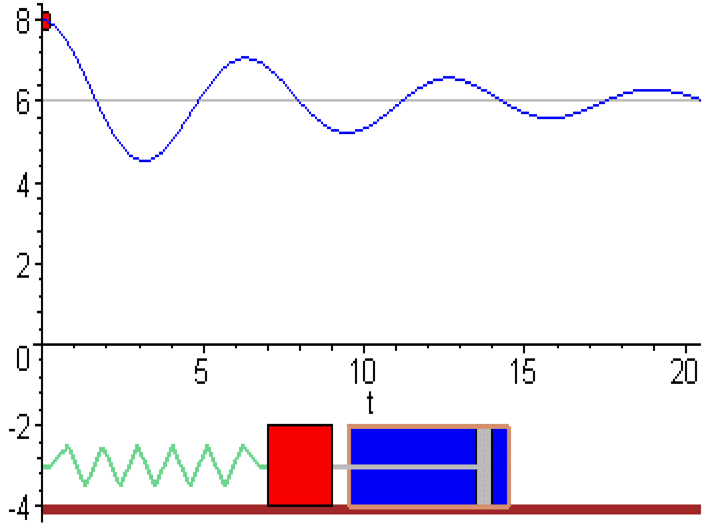
欠阻尼振动



过阻尼



临界阻尼



欠阻尼

阻尼运动的能量耗散

动力学方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0{}^2 x = 0$$

机械能： $E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$\frac{dE}{dt} = mv_x\frac{dv_x}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = mv_x(a + \frac{k}{m}x)$$

$$\frac{dE}{dt} = -2m\delta v_x^2$$

摩擦力的功率： $P = fv = -2m\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}v = -2m\delta v^2$

品质因素-Q

品质因素反映了在存在阻尼情况下每经过一个周期，振动系统能量损失的大小。

定义： $$Q=2\pi\frac{E(t)}{E(t)-E(t+T)}$$

$$Q=2\pi\frac{kA_0^2/2}{kA_0^2/2-kA_0^2\mathrm{e}^{-2\delta T}/2}=\frac{2\pi}{1-\mathrm{e}^{-2\delta T}}$$

在低阻尼情况下 $$Q\approx\frac{\pi}{\delta T}=\frac{\omega_0}{2\delta}$$

微波发射，需要在谐振腔里放大信号，品质Q就代表了发射的能耗。