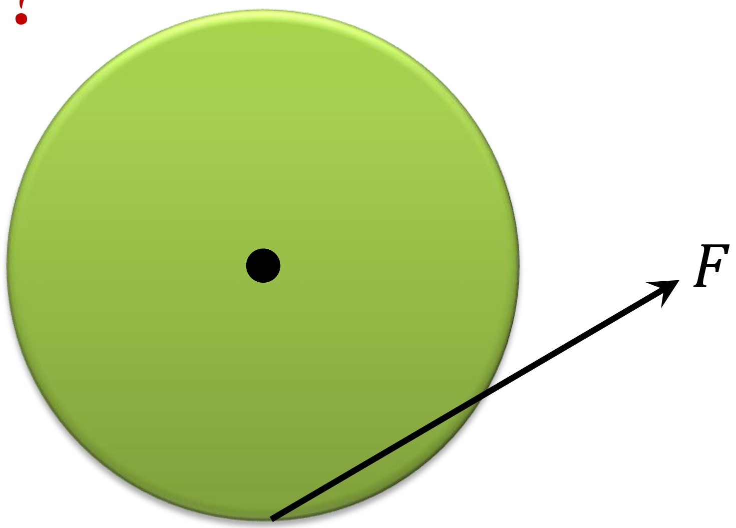
刚体，（定轴）转动

如何转动一个圆盘？



静止 —力→ 运动：绕轴的转动

什么样的力？合力的大小？

角速度

无动能 —质点系的动能定理→ 转动的动能

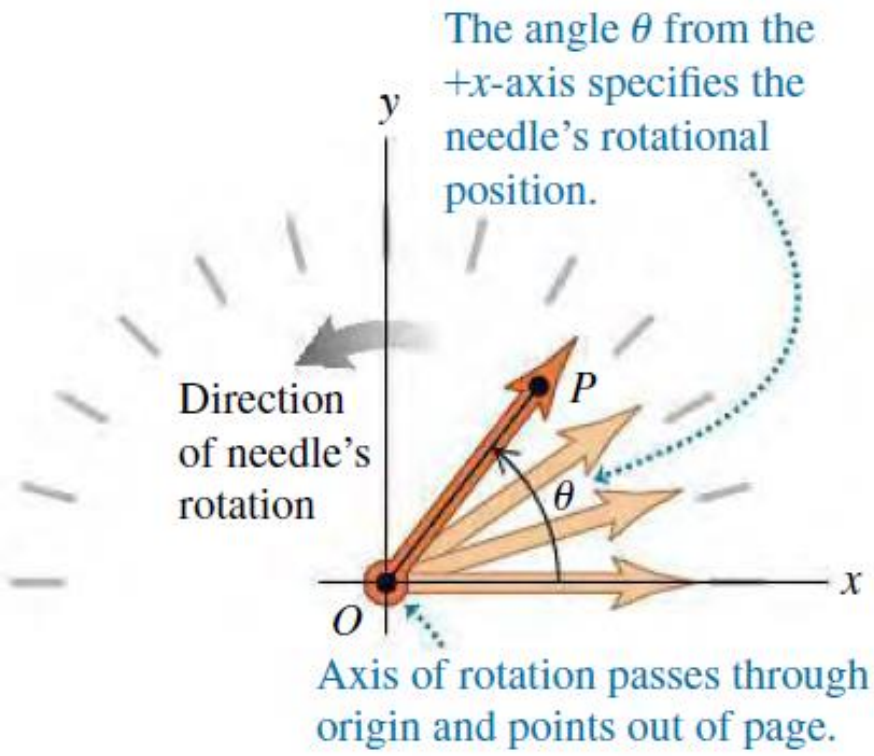
质点间相对位置不变

零动量 —质点系的动量定理→ 零动量

质心系中仍为零动量

如何用角速度写出动能？

角速度——转动快慢的度量



角度是无量纲的量

转动对应的度量： $\theta = \frac{s}{r}$ or $s = r\theta$

$$1\ \text{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.3^\circ$$

定义定轴转动需要：转轴的位置，转轴的方向（转动平面），转角的方向（手性）

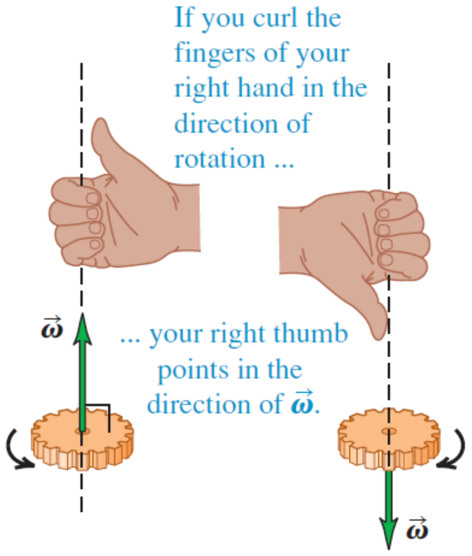
转动快慢的衡量： $\omega_{\text{av-}z} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

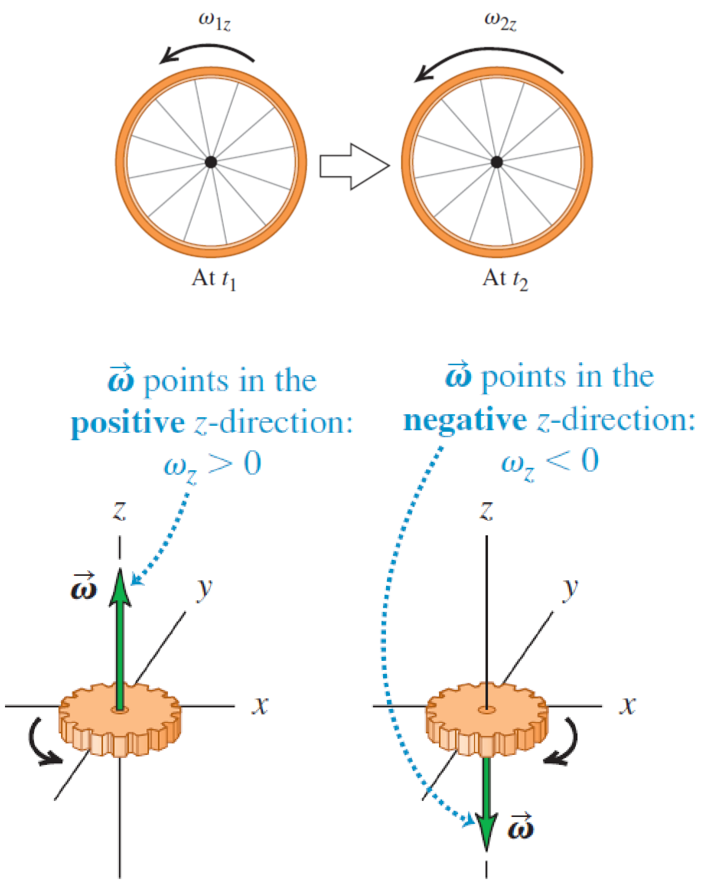
$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

角速度方向

用矢量去描述转动：
转动在平面内发生，角速度方向沿着平面的法线方向

右手定则：描述的一个约定
角速度在镜面反射操作下如何变化？
根源是什么？
二维空间有两个基矢，但角速度只有一个轴
三维空间呢？N维空间呢？





角速度只在三维空间与矢量同构

更一般的描述方式：二阶反对称张量

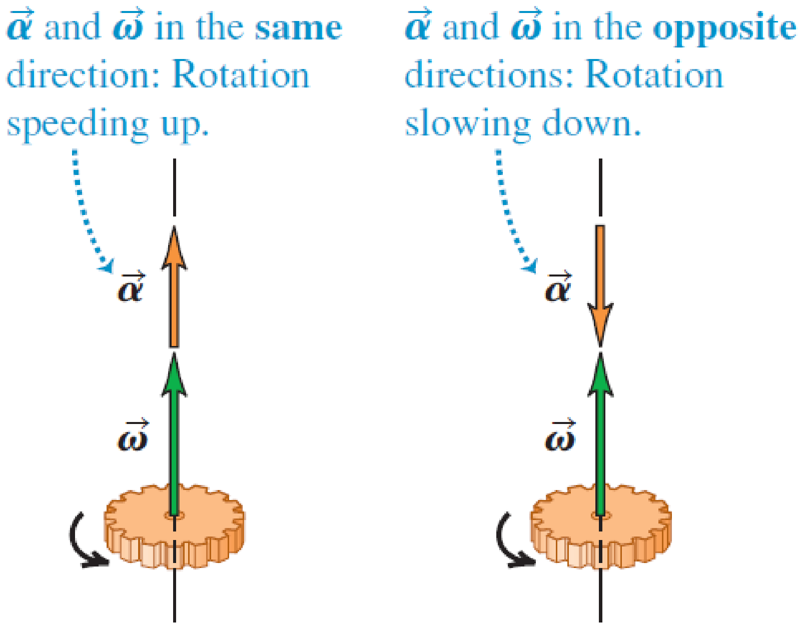
$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \qquad W = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

角加速度

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} \qquad \text{(definition of angular acceleration)}$$

$$\alpha_z = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$



当角速度方向不变，
只是大小改变时，角加速度沿着角速度的方向

速度和角速度之间的关系 $\vec{v_t} = \vec{\omega} \times \vec{r} = W\vec{r}$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

刚体

质点：只考虑物体的质量，忽略其形状和大小。

质点没有转动

刚体：既考虑物体的质量, 又考虑形状和大小，忽略其形变。

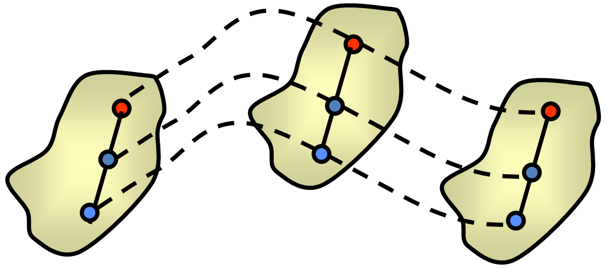
刚体与质点系的区别？？

刚体运动的基本形式

1. 平动

刚体内任一直线在运动过程中始终保持平行。

刚体内各质点在任一时刻具有相同的速度和加速度。



➢ 可以用质点动力学的方法来处理刚体的平动问题。

刚体

2. 转动　　刚体上所有质点都绕同一直线(即转轴)作圆周运动。

a. 定轴转动　　如：门、 窗的转动等。

b. 定点转动　　如：陀螺的转动。

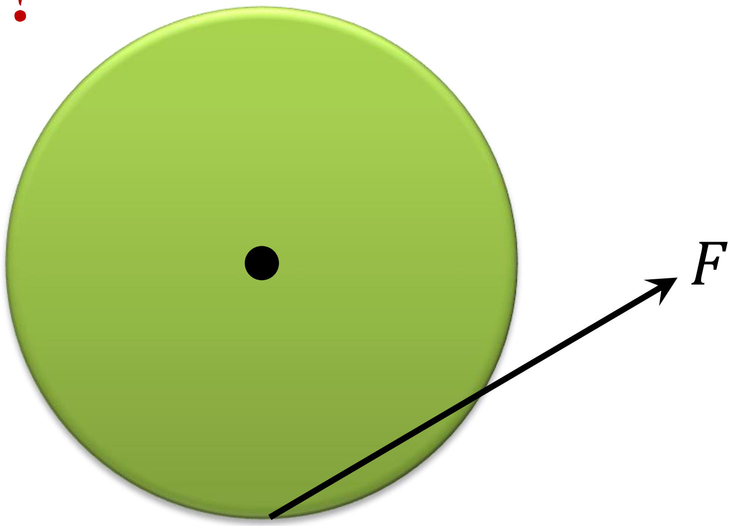
3. 平面运动　　刚体上每一质元的运动都平行于某一固定平面。

可以分解为刚体随质心的平移和绕质心垂直于运动平面的定轴转动。　　如：车轮滚动。

4. 刚体的一般运动

可以分解为随质心的平移和绕质心的定点转动。

如何转动一个圆盘？



静止 —力→ 运动：绕轴的转动

什么样的力？合力的大小？

角速度

无动能 —质点系的动能定理→ 转动的动能

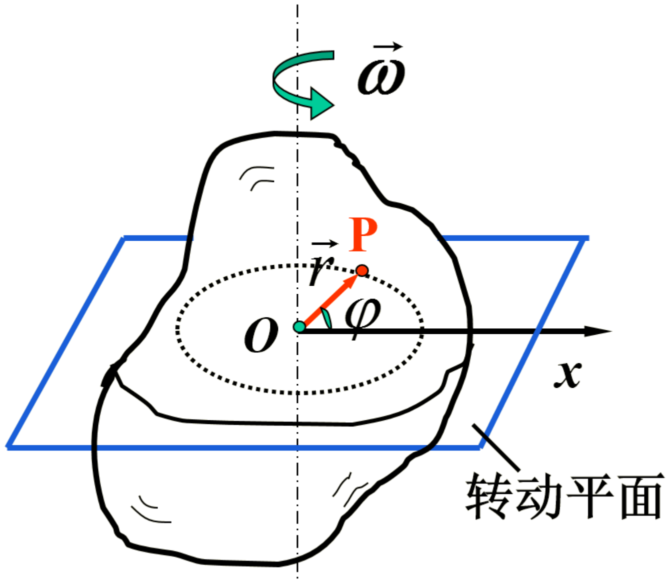
质点间相对位置不变

零动量 —质点系的动量定理→ 零动量

质心系中仍为零动量

如何用角速度写出动能？

刚体的定轴转动



相对距离、角度都不变。

在转动中，如果以刚体自身的一点为参考，各点转动角速度相等。

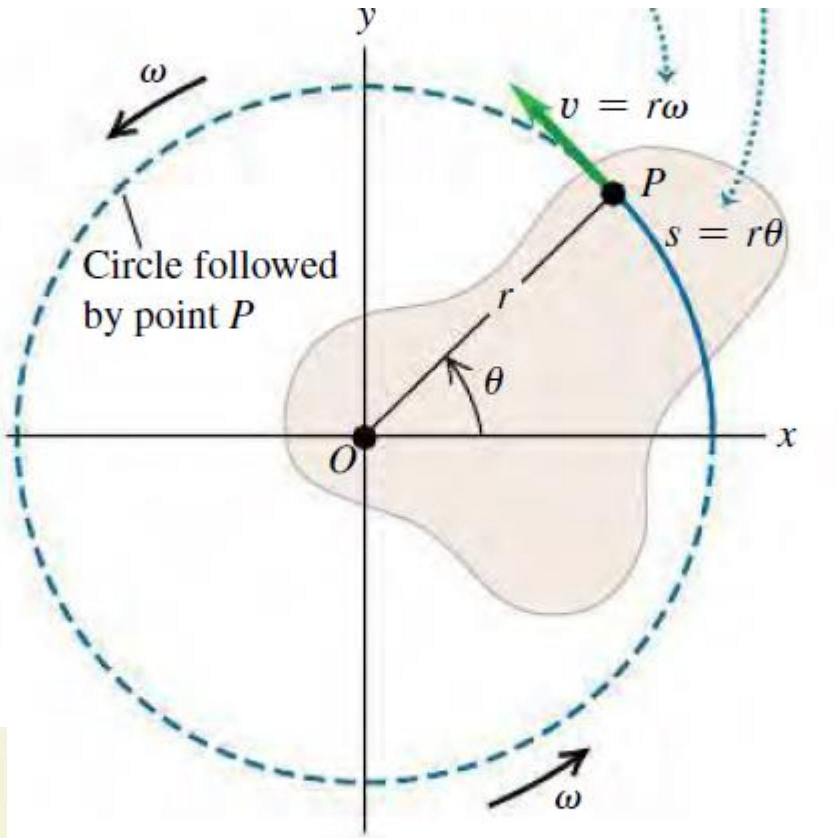
转动惯量

如何描述转动的动能？

质点系的定轴转动

$$K = \tfrac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \cdots = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

$$K = \tfrac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots)\omega^2 = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_i m_i r_i^2\Big)\omega^2$$



转动惯量：

Moment of inertia of a body for a given rotation axis

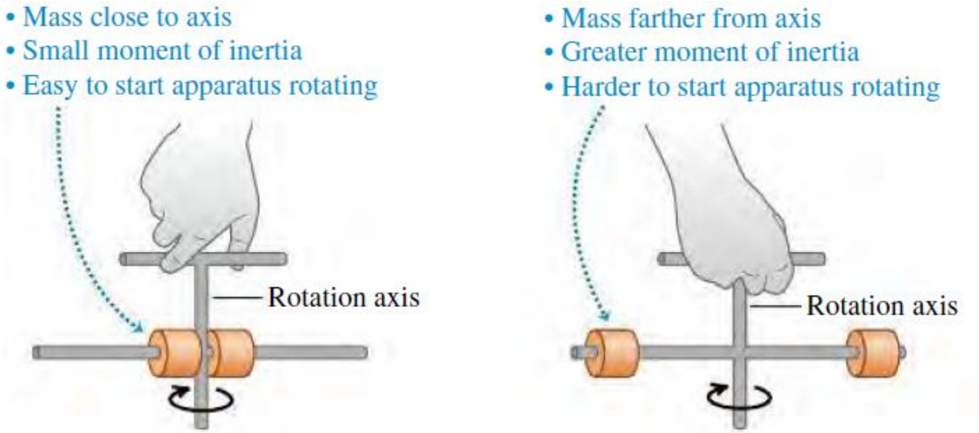
Masses of the particles that make up the body

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2$$

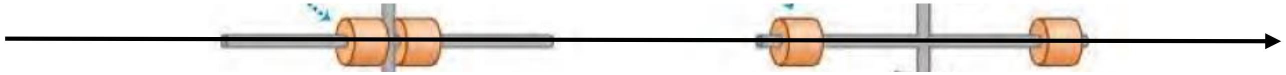
Perpendicular distances of the particles from rotation axis

转动惯量

研究对象质量的空间分布的表征
与转轴的位置、方向有关
与运动状态无关。



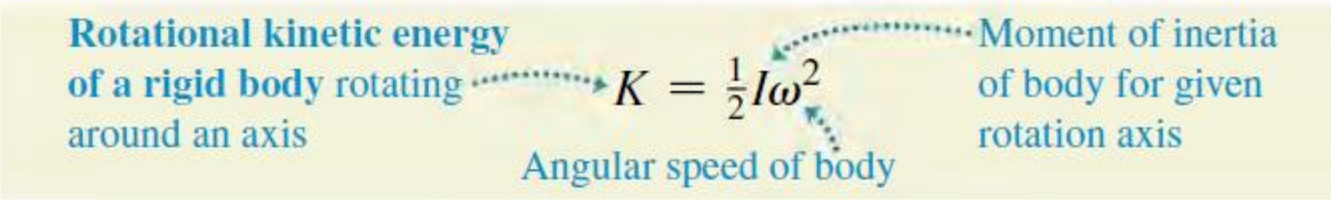
对二维空间，转动惯量是个标量



对于高维空间，转动惯量是一个二阶对称张量

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

旋转的能量：



平行轴原理

Parallel-axis theorem:

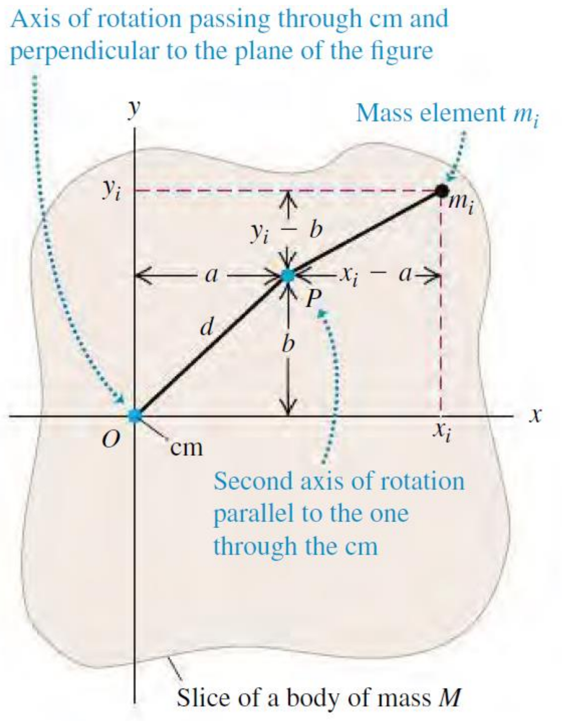
$$I_P = I_{cm} + Md^2$$

Moment of inertia of a body for a rotation axis through point P

Mass of body

Distance between two parallel axes

Moment of inertia of body for a parallel axis through center of mass



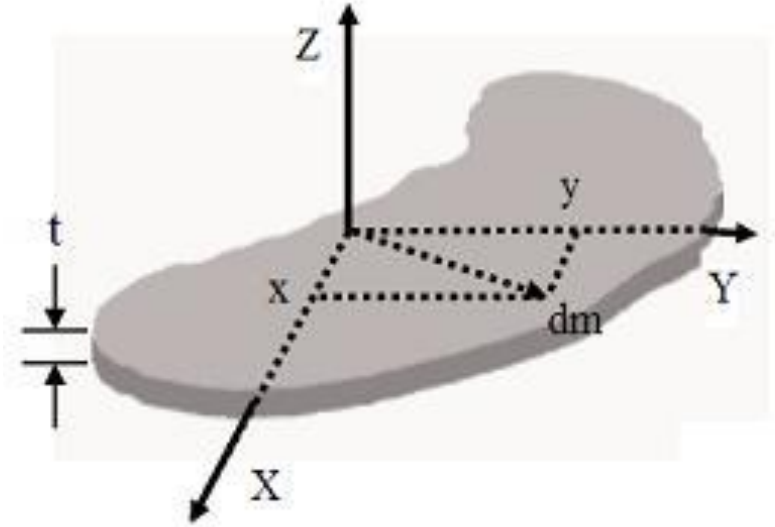
M: 刚体的总质量
d: 两轴之间的垂直距离

仅对通过质心的转轴成立

垂直轴原理

$$I_Z = I_X + I_Y$$

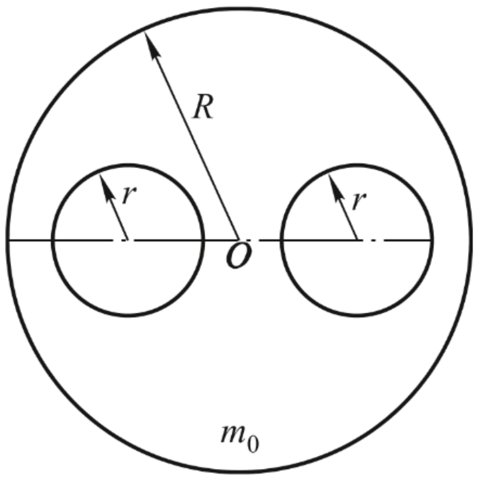
仅对二维刚体成立
不需要穿过质心



$$I_X \approx \int y^2 \, dm$$
$$I_Y \approx \int x^2 \, dm$$
$$I_Z = \int (x^2 + y^2) \, dm \text{。}$$

$$\Rightarrow \quad I_Z = I_X + I_Y$$

例 3-2 如图所示，在质量为 m_0、半径为 R 的匀质圆盘上挖出半径为 r 的两个圆孔，圆孔中心在半径 R 的中点，求剩余部分对通过大圆盘中心且与盘面垂直的轴线的转动惯量.



例 3-2 图

解 设未挖两个圆孔时的大圆盘转动惯量为 J，半径为 r 的小圆盘转动惯量分别为 J_1 和 J_2(对题中所说的轴)，每个挖去部分的质量为 m，根据对称性 $J_1=J_2$，又根据平行轴定理有

$$J_1=J_2=\frac{1}{2}mr^2+m\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

则挖去两个圆孔后的转动惯量为

$$\begin{aligned}J_0&=J-J_1-J_2\\&=\frac{1}{2}m_0R^2-2\left[\frac{1}{2}mr^2+m\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{2}m_0R^2-2\left(\frac{1}{2}\frac{m_0}{\pi R^2}\pi r^2\cdot r^2+\frac{m_0}{\pi R^2}\pi r^2\cdot\frac{R^2}{4}\right)\\&=\frac{1}{2}m_0\left(R^2-\frac{2r^4}{R^2}-r^2\right)\end{aligned}$$

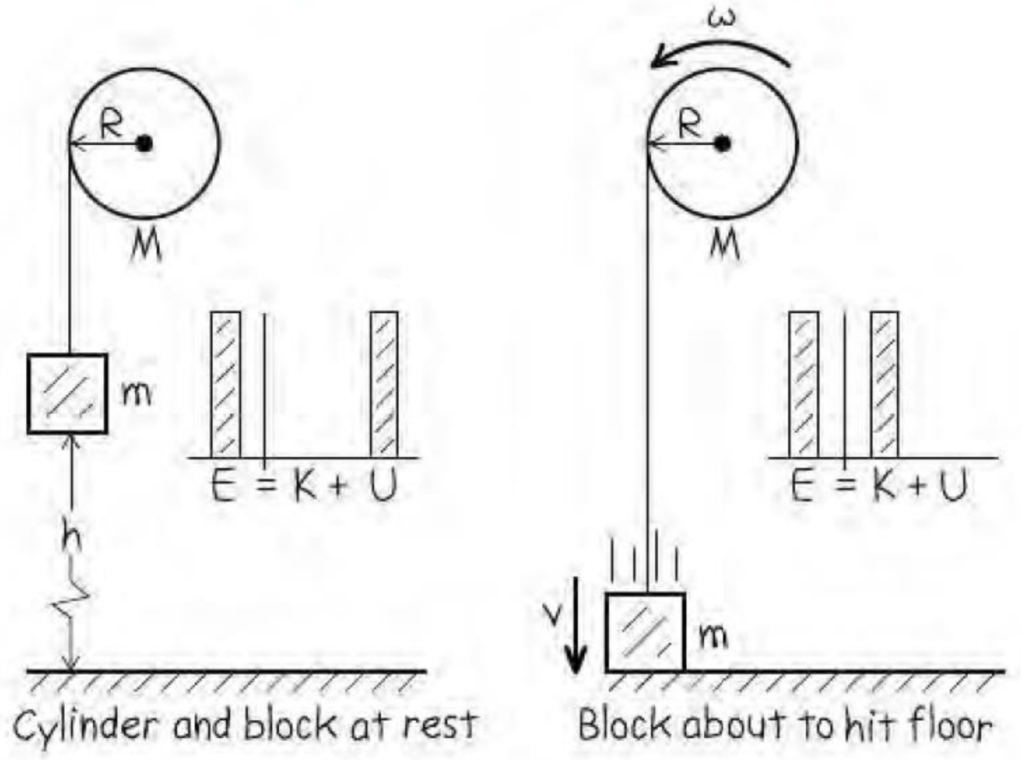
小结

(1) 转动惯量 J 为正的标量，它们可以叠加，但要注意，它们是对同一个转轴的.

(2) 本题应用了平行轴定理，问题很容易得到解决，但要注意公式 $J=J_0+md^2$ 中的 d 是两个平行轴之间的垂直距离.

应用

(a) Initial (block at point 1)　　(b) Final (block at point 2)



$$0 + mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 0$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(m + \tfrac{1}{2}M\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

质心平动加定轴转动

质心速度

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i{}'$$

定轴转动的速度

$$K_i = \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i{}') \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i{}')$$

$$= \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i{}' + \vec{v}_i{}' \cdot \vec{v}_i{}')$$

$$= \frac{1}{2}m_i(v_{cm}{}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i{}' + v_i{}'^2)$$

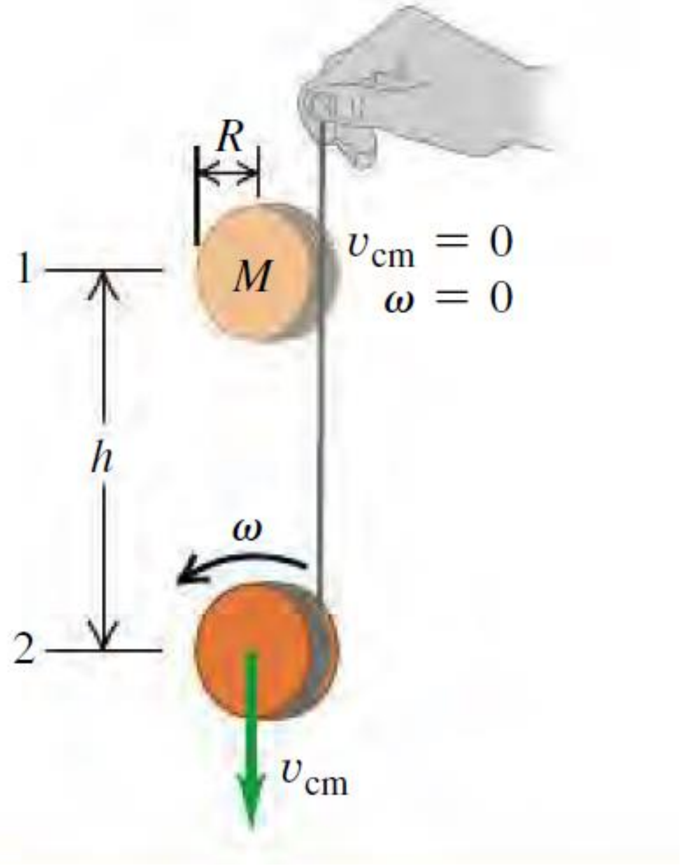
$$K = \sum K_i = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_{cm}{}^2\right) + \sum(m_i \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i{}') + \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i{}'^2\right)$$

质心系内为0

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

刚体的动能等于质心动能和相对于质心旋转的动能之和。

悠悠球



刚体的动能等于质心动能和相对于质心旋转的动能之和。

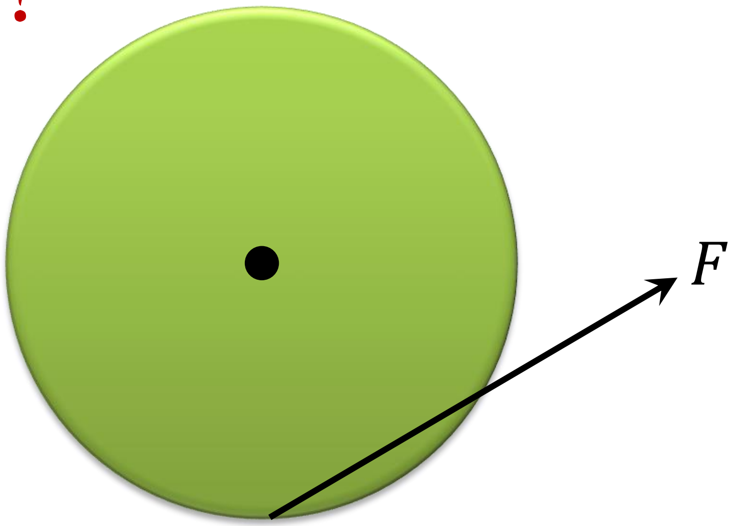
$$K_2 = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = \tfrac{3}{4}Mv_{cm}^2$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \tfrac{3}{4}Mv_{cm}^2 + 0$$

$$v_{cm} = \sqrt{\tfrac{4}{3}gh}$$

如何转动一个圆盘？



静止 $\xrightarrow{\text{力}}$ 运动：绕轴的转动

什么样的力？合力的大小？

角速度

无动能 $\xrightarrow{\text{质点系的动能定理}}$ 转动的动能

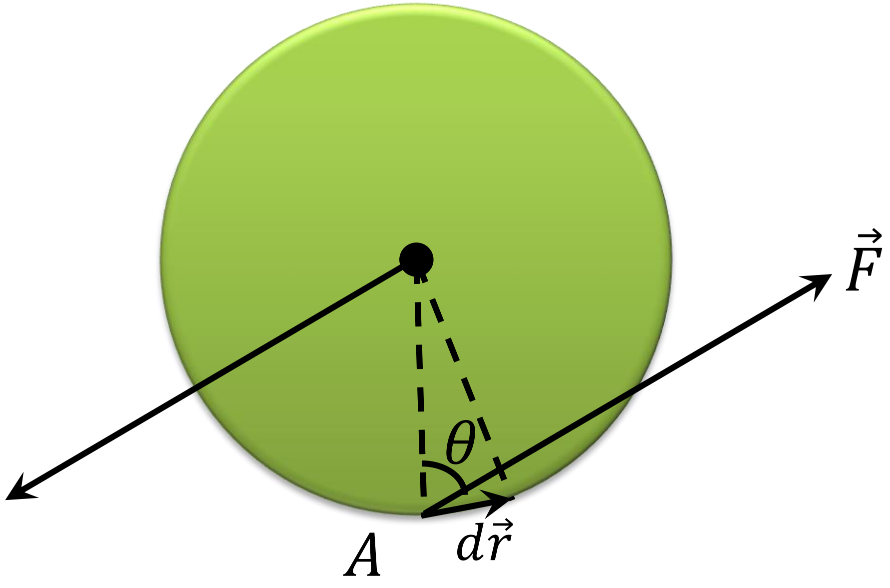
质点间相对位置不变

零动量 $\xrightarrow{\text{质点系的动量定理}}$ 零动量

质心系中仍为零动量

如何用角速度写出动能？

如何转动一个圆盘？



考虑外力做功使圆盘加速的过程

动能定理 $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}I(\omega_0 + d\omega)^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$

做功 $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F\sin\theta\, dr = F\sin\theta\, r\omega_0 dt$

$F\sin\theta\, r\omega_0 dt = I\omega_0 d\omega$ $\quad$ $F\sin\theta\, r = I d\omega/dt$

引入定义

力矩 $\vec{r}\times\vec{F} = F\sin\theta\, r\, \vec{e}_\omega$

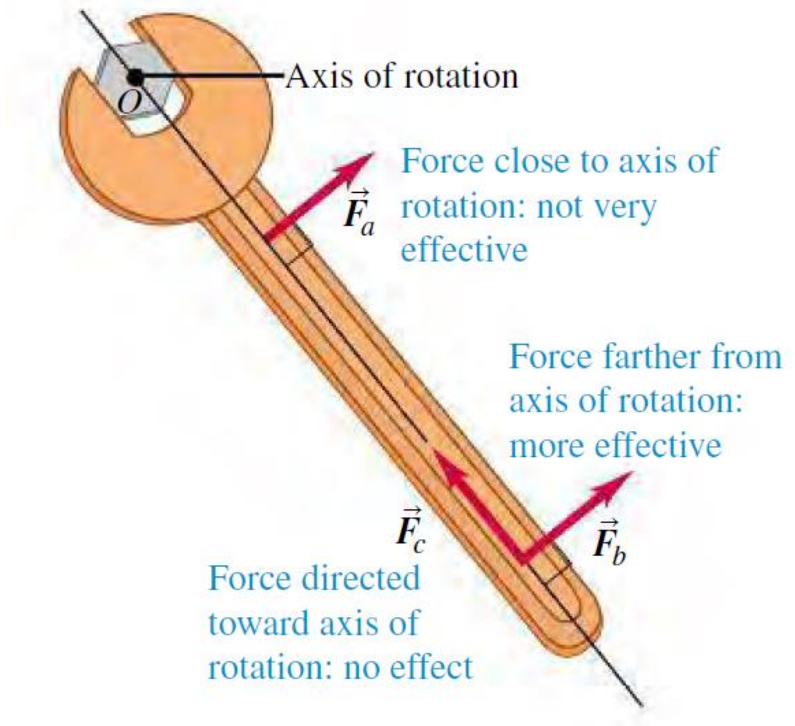
ω的方向

角动量 $\vec{L} = I\vec{\omega}$

$$\vec{r}\times\vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

如何推广这两个定义？

力矩



- 受力点
- 旋转轴
- 会随着参考系变化而变化

Torque vector due to force $\vec{F}$ relative to point O

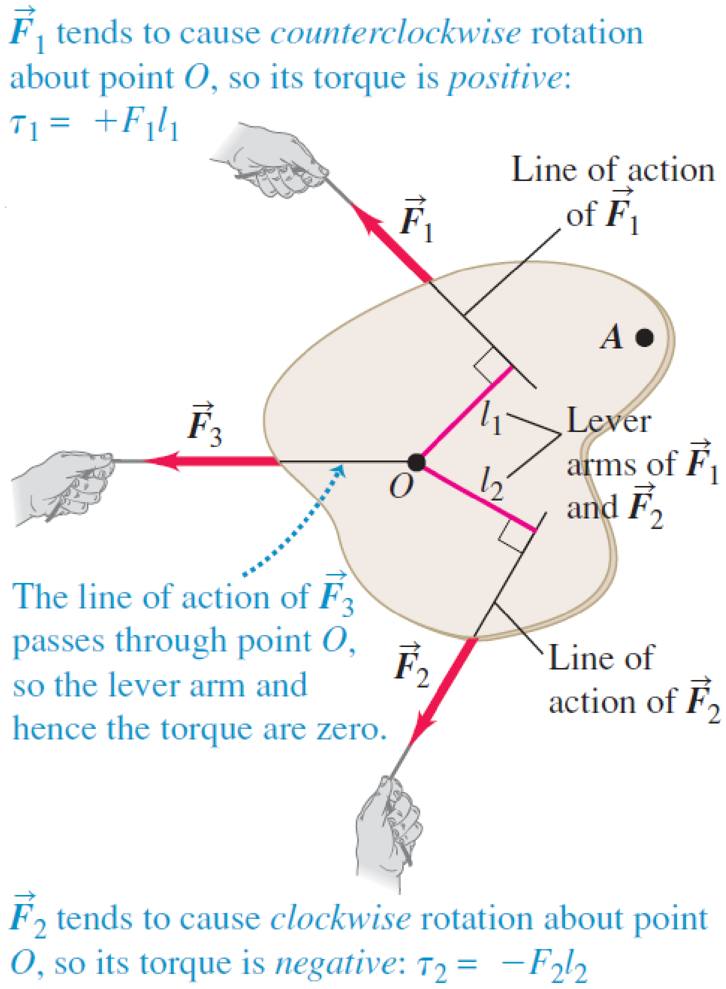
Vector from O to where $\vec{F}$ acts

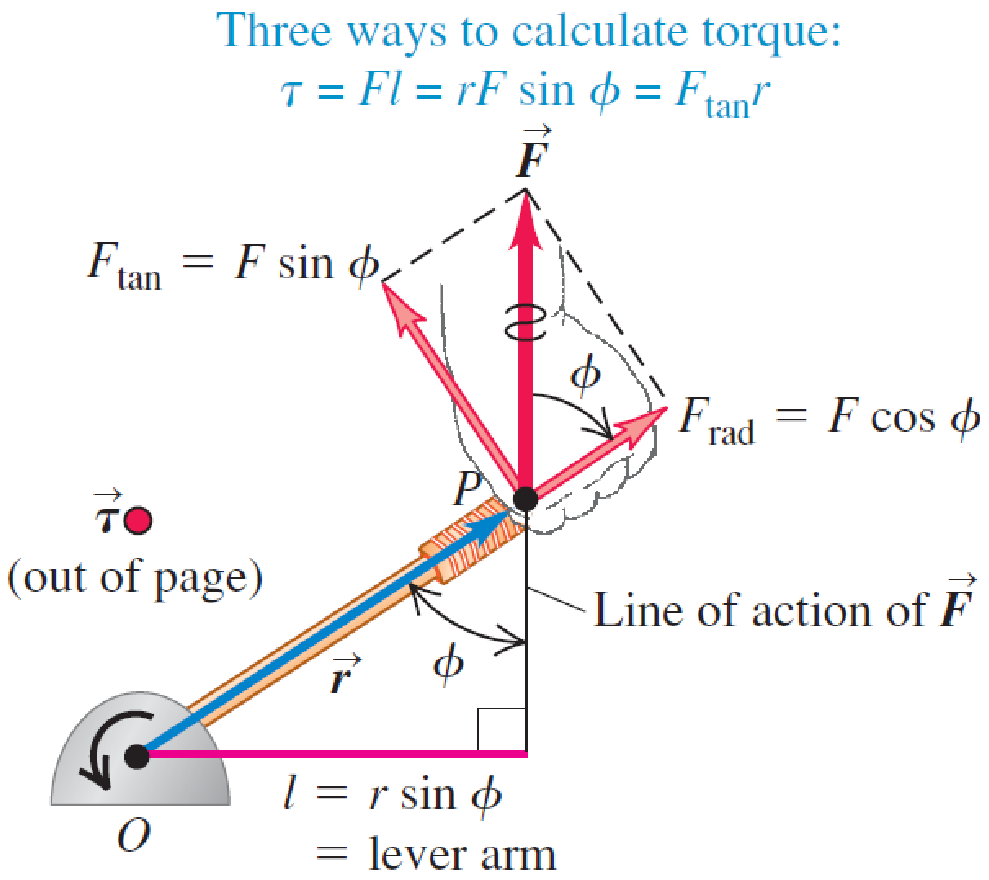
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Force $\vec{F}$

一个力的力矩指向它企图驱动的旋转的方向。

力矩

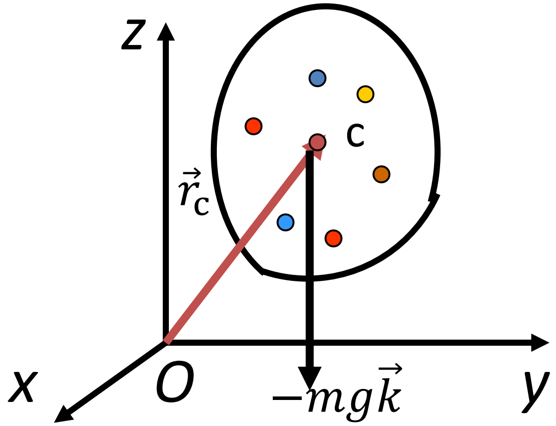

$\vec{F}_1$ tends to cause *counterclockwise* rotation about point O, so its torque is *positive*: $\tau_1 = +F_1 l_1$
Line of action of $\vec{F}_1$
$\vec{F}_1$
A
$\vec{F}_3$
O
l_1
l_2
Lever arms of $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$
The line of action of $\vec{F}_3$ passes through point O, so the lever arm and hence the torque are zero.
$\vec{F}_2$
Line of action of $\vec{F}_2$
$\vec{F}_2$ tends to cause *clockwise* rotation about point O, so its torque is *negative*: $\tau_2 = -F_2 l_2$


Three ways to calculate torque:
$\tau = Fl = rF\sin\phi = F_{tan} r$
$\vec{F}$
$F_{tan} = F\sin\phi$
ϕ
$F_{rad} = F\cos\phi$
P
$\vec{\tau}$
(out of page)
Line of action of $\vec{F}$
$\vec{r}$
ϕ
O
$l = r\sin\phi$
$=$ lever arm

质点系上的合力矩

作用于质点系的力矩

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



外力的力矩（以重力矩为例）

$$\vec{M}_g = \sum_i \vec{r}_i \times (-m_i\, g\vec{k}) = -m\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}\right) \times g\vec{k} \qquad \left(m = \sum_i m_i\right)$$

$$\boxed{\vec{M}_g = -\vec{r}_c \times mg\vec{k}}$$

等效于重力作用在质心上，
不能推广到一般的作用力

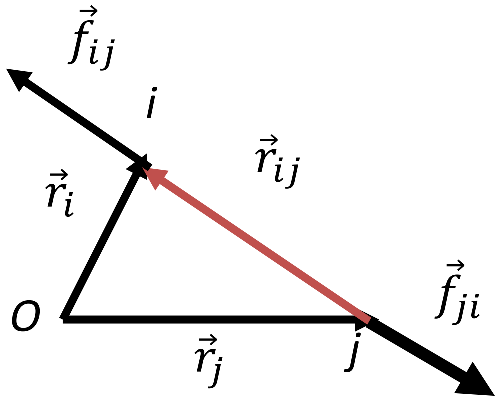
质点系上的合力矩

内力的力矩

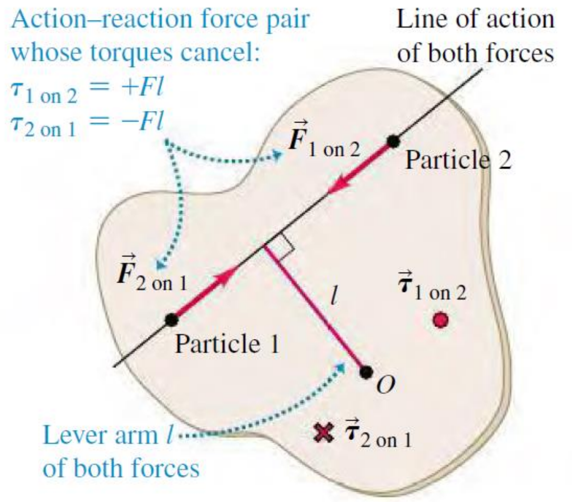
$$\vec{M}_{ij} = \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}$$

$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = \vec{r}_{ij} \times \vec{f}_{ij} \equiv 0$$

平行矢量的叉乘=0

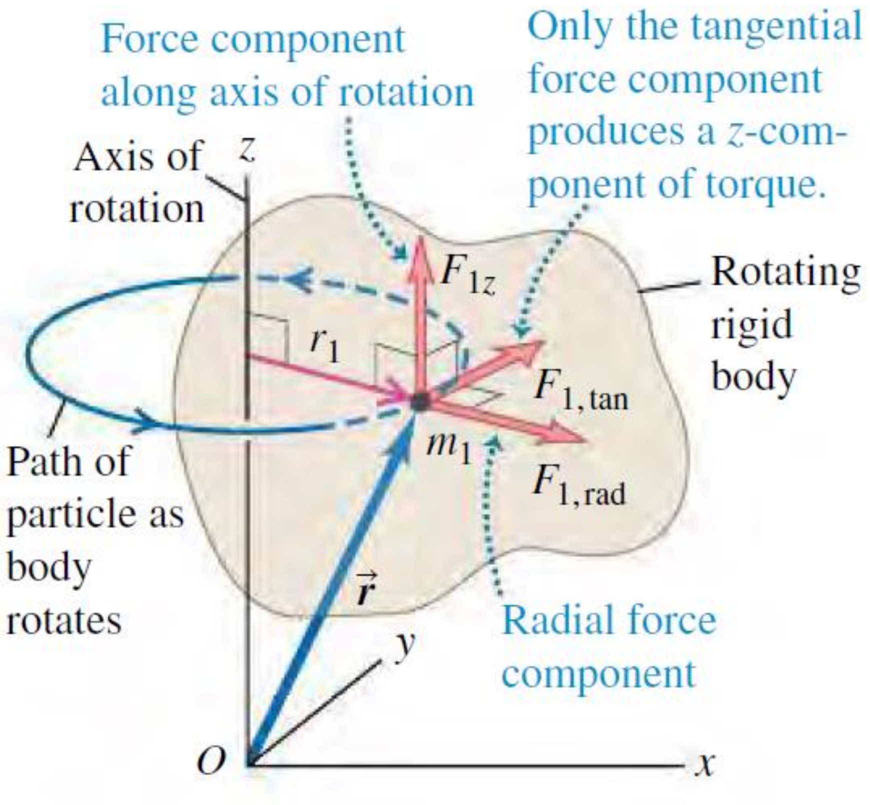


➢ 质点系内力矩的矢量和为零。



力矩 - 角加速度

从牛顿第二定律的角度出发



考虑单个质点

$$F_{1,\tan} = m_1 a_{1,\tan}$$

$$F_{1,\tan} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha_z$$

$$\tau_{1z} = I_1 \alpha_z = m_1 r_1^2 \alpha_z$$

角加速度

对质点系求和

$$\sum \tau_{iz} = \left(\sum m_i r_i^2\right)\alpha_z$$

Rotational analog of Newton's second law for a rigid body:

Net torque on a rigid body about z-axis

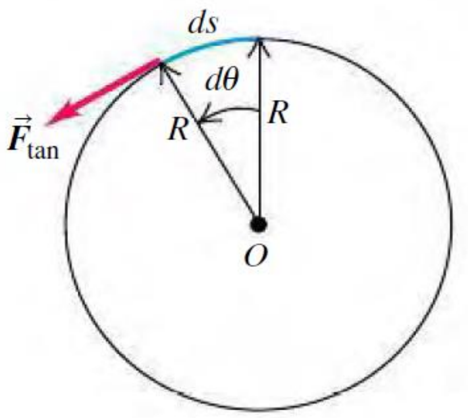
$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

Moment of inertia of rigid body about z-axis

Angular acceleration of rigid body about z-axis

外力矩

旋转：力矩与做功



力矩与做功的关系 $dW = \tau_z \, d\theta$

质点 $dW = F_{tan} R \, d\theta$

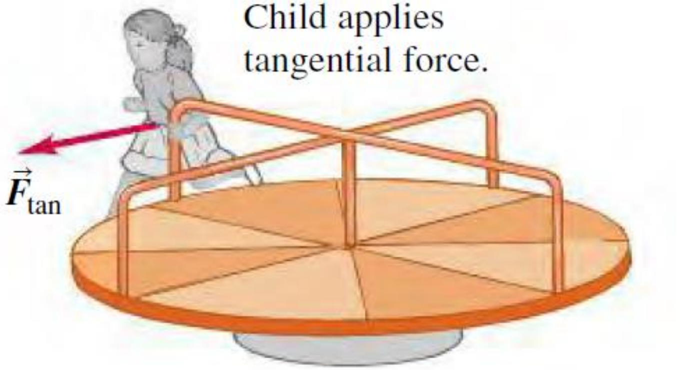
Work done by a torque τ_z

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z \, d\theta$$

Upper limit = final angular position

Integral of the torque with respect to angle

Lower limit = initial angular position

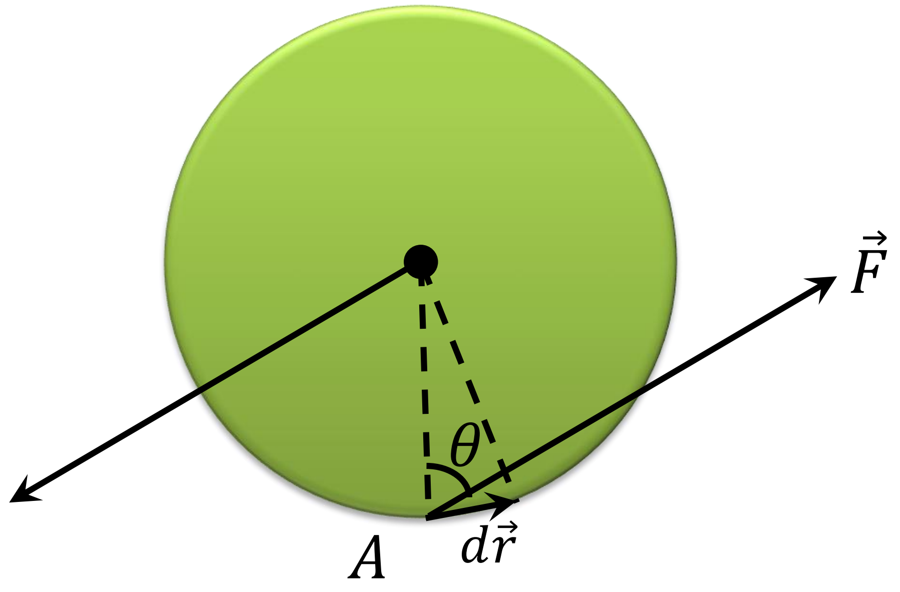


刚体 $$\tau_z \, d\theta = (I\alpha_z) \, d\theta = I \frac{d\omega_z}{dt} d\theta = I \frac{d\theta}{dt} d\omega_z = I\omega_z \, d\omega_z$$

Total work done on a rotating rigid body = work done by the net external torque

$$W_{tot} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z \, d\omega_z = \overbrace{\tfrac{1}{2}I\omega_2^2}^{\text{Final rotational kinetic energy}} - \underbrace{\tfrac{1}{2}I\omega_1^2}_{\text{Initial rotational kinetic energy}}$$

力矩对时间的积累



对于刚体

$$\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)\mathrm{dt}=d\vec{L}=Id\vec{\omega}$$

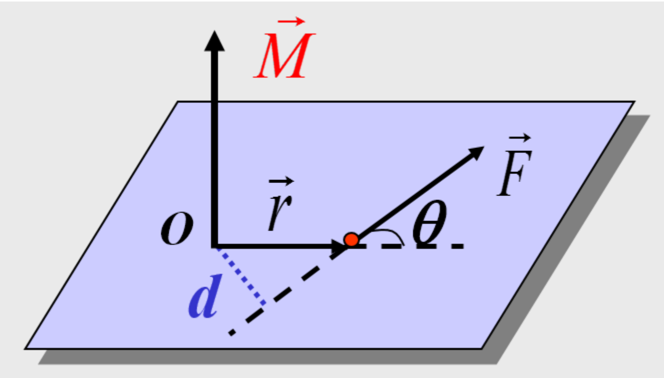
角动量$\vec{L}=I\vec{\omega}$

对于质点

$$\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)\mathrm{dt}=\vec{r}\times\mathrm{d}(m\vec{v})=\mathrm{d}(\vec{r}\times m\vec{v})$$

注意$\mathrm{d}\vec{r}$与$m\vec{v}$是平行的

同样可以定义$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$



对于做圆周运动的质点，$\vec{r}\times m\vec{v}=mr^2\vec{\omega}=I\vec{\omega}$

从物理意义上推广了角动量：角动量是力矩对时间的积累

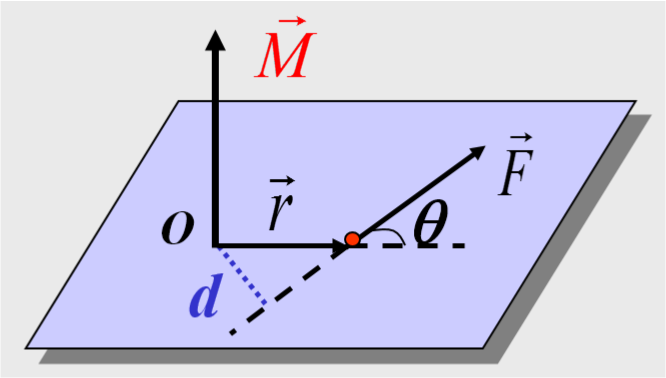
质点的角动量定理

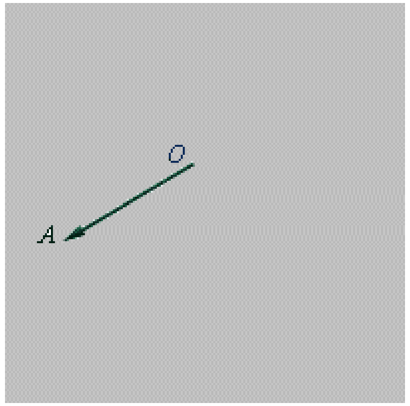
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}+\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times m\vec{v}}_{=0}$$

$$=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

合力对参考点O的力矩： $\sum\tau=Fd=Fr\sin\theta$





质点角动量定理

质点对某固定参考点的角动量的变化率等于质点所受合力对同一参考点的力矩。

$$\boxed{\vec{\tau}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

力矩$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$

- 角动量定理是描述质点转动的动力学方程

$$\boxed{\vec{\tau}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}}$$ (微分形式)

$$\boxed{\int_{t_0}^{t}\vec{\tau}\,\mathrm{d}t=\int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}}\mathrm{d}\vec{L}=\vec{L}-\vec{L}_0}$$ (积分形式)

$\int_{t_0}^{t}\vec{\tau}\,\mathrm{d}t$称合力矩在$t_0\rightarrow t$时间内的角冲量或冲量矩。

质点角动量守恒定律

若$\vec{\tau}=0$，则$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0$，　$\vec{L}=\vec{L}_0$ (恒矢量)

各分量具有独立性：

$\tau_x=0$时，$L_x=C_1$

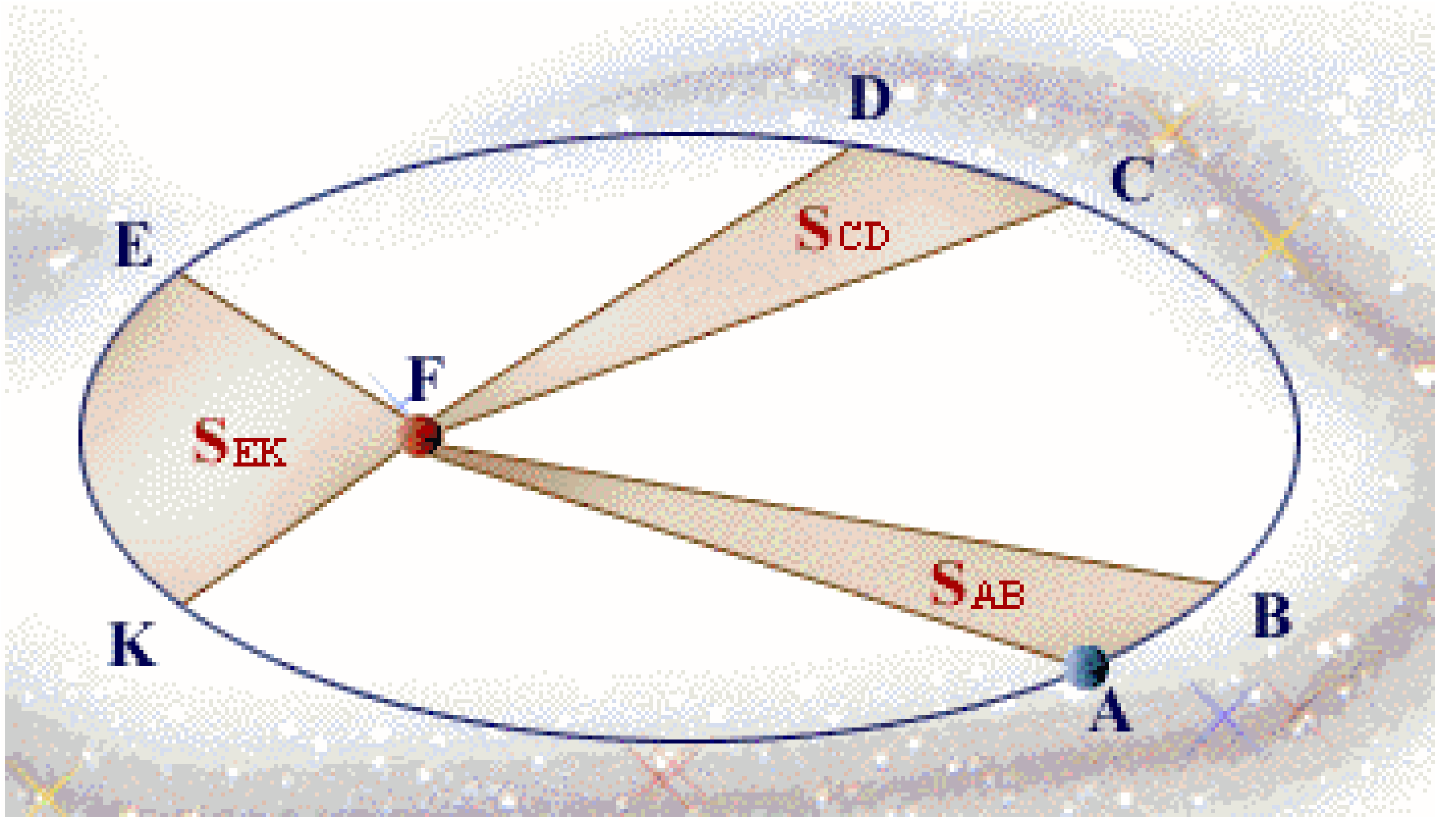
$\tau_y=0$时，$L_y=C_2$

$\tau_z=0$时，$L_z=C_3$

- 在**中心力**场中，关于力心的角动量守恒

  $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}=0$

角动量

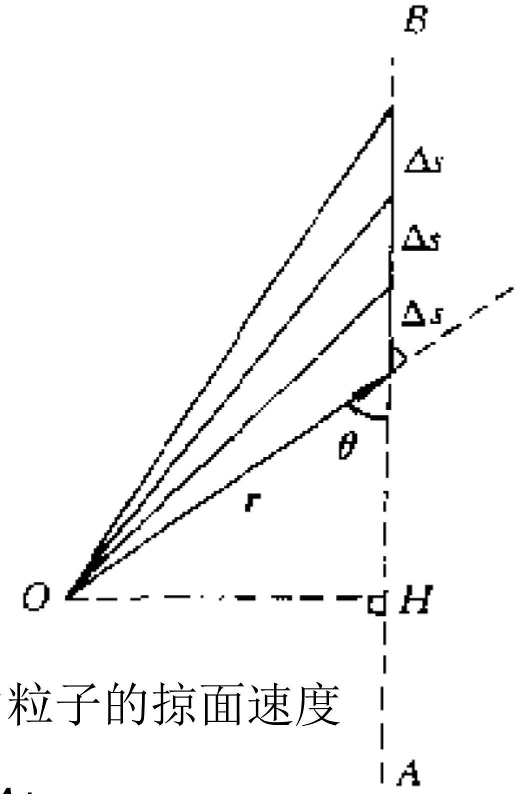


天文观测：

不变量！

角动量的引入：掠面速度

质点与原点O的连线在单位时间扫过的面积

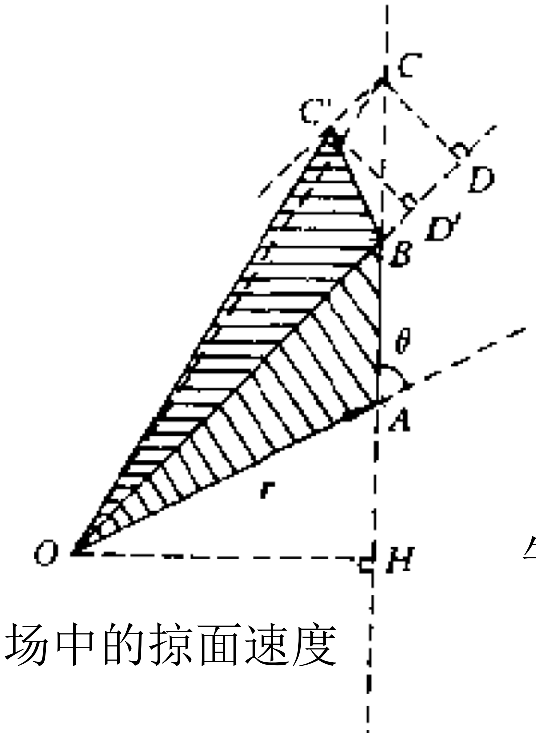


自由粒子的掠面速度

$\Delta s = v\Delta t$

三角形面积为$vr\Delta t\ sin\theta/2$

$\omega = v\sin\theta/r$ 所以掠面速度为$\frac{1}{2}\omega r^2$



有心力场中的掠面速度

牛顿：《论物体的运动》

掠面速度使用矢量形式能够写作

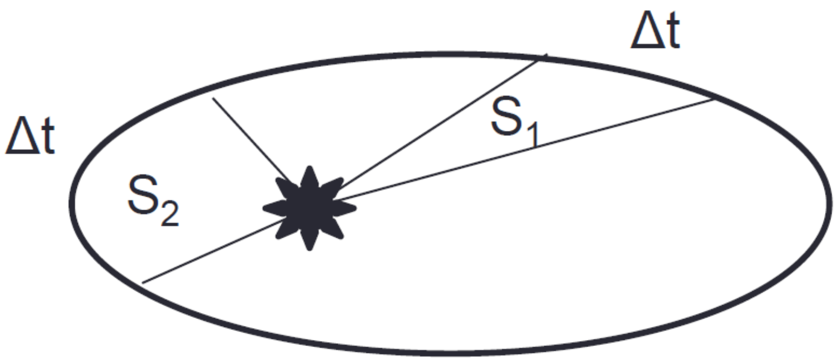
$\frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}$

开普勒三定律：通过观察得到

1：所有行星都在绕着太阳作椭圆运动，以太阳为椭圆的一个焦点。

2：面积 $S_1=S_2$ 掠面速度相等

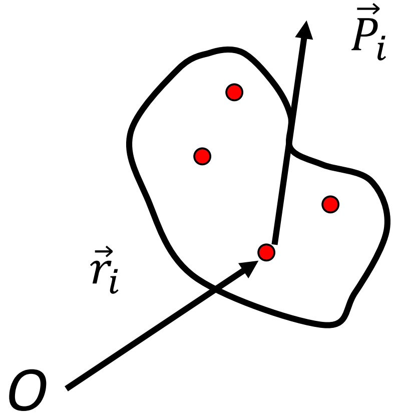
3：行星公转周期正比于半长轴的3/2次方。



质点系的角动量定理

对参考点O，质点系的总角动量：

$$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i)$$



$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\sum_i\vec{r}_i\times m_i\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\sum_i\underbrace{\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\times m_i\vec{v}_i}}_{=0}+\sum_i\vec{r}_i\times m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\because\ m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}=\underbrace{\vec{F}_i}_{\text{外力}}+\underbrace{\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}}_{\text{内力}}$$

$$\sum_i(\vec{r}_i\times\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij})\equiv 0$$

质点系内力矩的矢量和为零。

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i=\vec{\tau}}$$

质点系的角动量定理

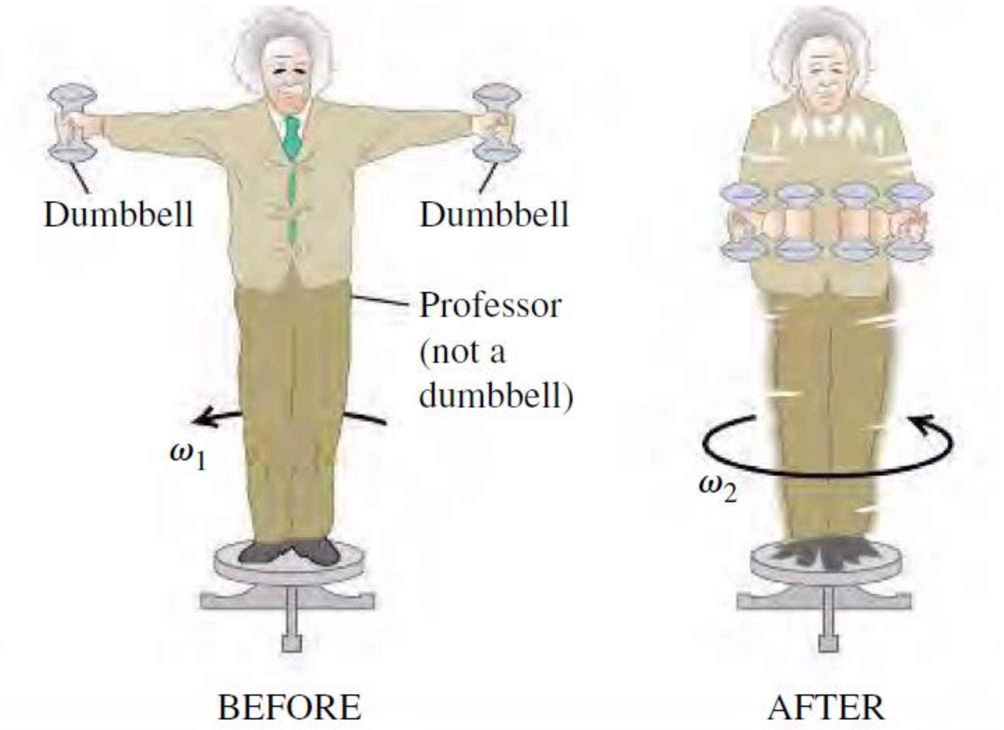
质点系的角动量定理

若 $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0,$$

则 $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \vec{L}_0$

质点系角动量守恒定律



生活中常见应用：花样滑冰、转椅子

https://www.sohu.com/a/250975690_500784
https://www.bilibili.com/video/av1673001?from=search&seid=10280585265111626704

质心系中的角动量定理

相对质心的角动量

第i个质点：$\vec{L}_i' = m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_c) \times (\vec{v}_i - \vec{v}_c)$　　$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i'$

整个系统：$$\vec{L}' = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i - \sum_i m_i \vec{r}_c \times \vec{v}_i \underbrace{\boxed{- \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_c + \sum_i m_i \vec{r}_c \times \vec{v}_c}}_{=0}$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i - M\vec{r}_c \times \vec{v}_c = \vec{L} - \vec{L}_c$$

总角动量 – 质心角动量

$$\boxed{\vec{L} = M\vec{r}_c \times \vec{v}_c + \vec{L}'}$$

注：此关系对质心以外的其它参考点一般不成立

质心系中的角动量定理

质心系中的角动量定理

$$\dot{\vec{L}}' = \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i' \times \vec{v}_i'}_{=0} + \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{v}}_i' \qquad \dot{\vec{v}}_i' = \dot{\vec{v}}_i - \dot{\vec{v}}_c$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{v}}_i \underbrace{- \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{v}}_c}_{=0}$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i$$

$$\boxed{\dot{\vec{L}}' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i}$$

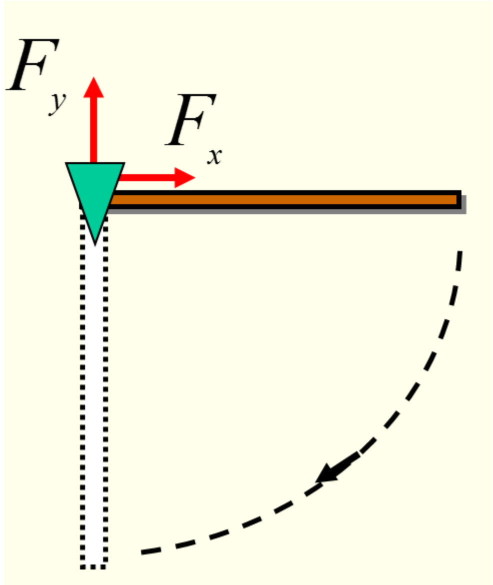
（1）与惯性系中形式完全相同

（2）无论质心系是否为惯性系上述关系均成立

惯性力的力矩：$\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{v}}_c = 0$

例题

均质细棒m， l， 水平轴O，开始棒处于水平状态， 由静止释放， 求棒摆到竖直位置时： (1) 棒的角速度，(2) 棒的转动动能，(3) 质心的加速度，(4) 轴的支反力。



解：

(1) $\frac{1}{2}J\omega^2 - mg\frac{l}{2} = 0$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$

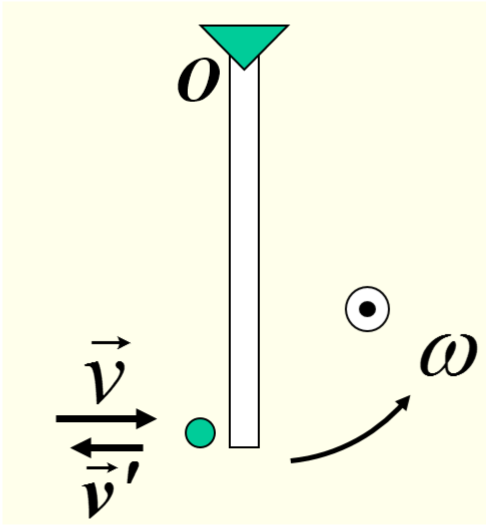
(2) $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}J\omega^2 = mg\frac{l}{2}$

(3) $a_{\mathrm{cn}} = \frac{l}{2}\omega^2 = \frac{3}{2}g$ $\qquad a_{\mathrm{ct}} = \frac{l}{2}\alpha = 0$ （合力矩为0）

(4) $F_x = ma_{\mathrm{ct}} = 0$ $\qquad F_y - mg = ma_{\mathrm{cn}}$ $\qquad F_y = mg + \frac{3}{2}mg = \frac{5}{2}mg$

例题

均质细棒：m_1、l，水平轴O，小球：m_2与棒相碰，碰前$\vec{v}$ 碰后$\vec{v}'$ 如图，设碰撞时间很短，棒保持竖直，求碰后棒的角速度。



解：　系统对O轴角动量守恒

$$m_2 l v = \frac{1}{3} m_1 l^2 \omega - m_2 l v'$$

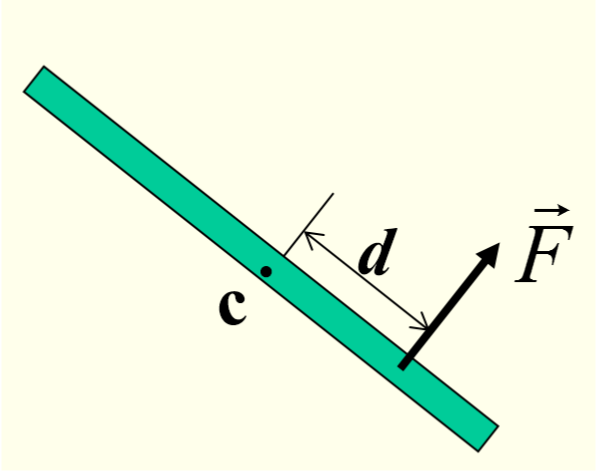
$$\omega = \frac{3 m_2 (v + v')}{m_1 l}$$

注意：系统总动量一般不守恒，因为轴承处的外力不能忽略。只当碰撞在打击中心时，N_x=0，系统的水平动量守恒：

例题

长l 质量 m 的匀质细杆放在光滑的水平面上，以水平力$\vec{F}$垂直作用在细杆上，作用点距质心为 d，计算$\vec{F}$作用瞬间细杆的角加速度和质心的加速度。

解：　质心运动定律：　$F = ma_c$



相对质心的角动量定理：$M_c = Fd = J_c\alpha$

$$J_c = \frac{1}{12}ml^2$$

$$\Rightarrow a_c = \frac{F}{m}\ ,\quad \alpha = \frac{12Fd}{ml^2}$$

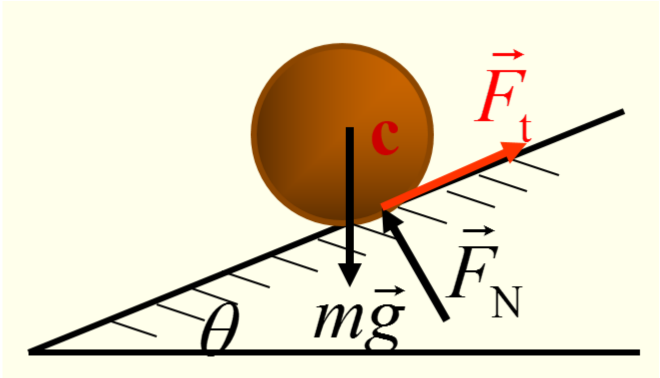
d =0 时，α =0，刚体只有平动没有转动。

例题（平动+转动）

一匀质圆球(r)从静止开始沿一粗糙斜面纯滚动而下，斜面倾角为θ，球从上端滚到下端球心高度相差为 h，计算小球滚到下端时质心的速度和转动角速度。

解：质心运动定律： $mg\sin\theta - F_t = ma_c$

$$F_N - mg\cos\theta = 0$$



相对质心的角动量定理：$F_t r = J_c \alpha \qquad J_c = \dfrac{2}{5}mr^2$

纯滚动条件(约束条件)： $v_c = r\omega \qquad a_c = r\alpha$

$$\Rightarrow a_c = \frac{5}{7}g\sin\theta \qquad \omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

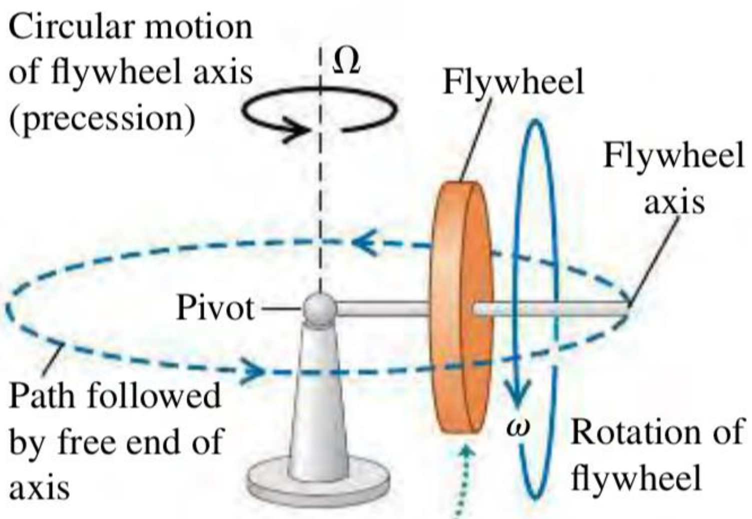
也可由机械能守恒计算：

$$mgh = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$$

$$v_c = r\omega$$

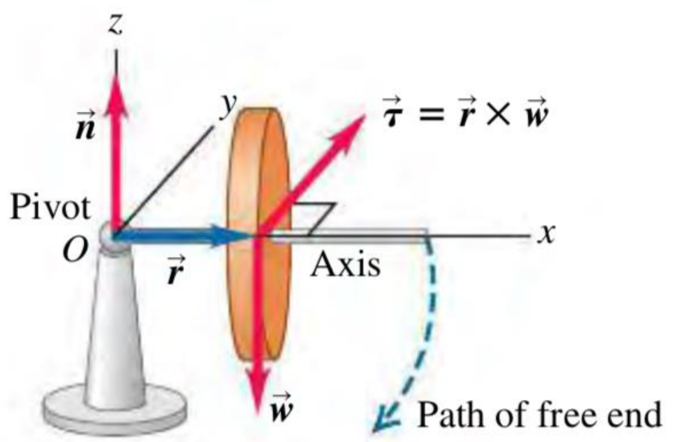
进动-precession

高速旋转的物体，其自转轴绕另一个轴转动的现象。

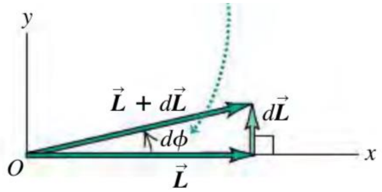


When the flywheel and its axis are stationary, they will fall to the table surface. When the flywheel spins, it and its axis “float” in the air while moving in a circle about the pivot.

(a) Nonrotating flywheel falls



When the flywheel is not rotating, its weight creates a torque around the pivot, causing it to fall along a circular path until its axis rests on the table surface.



$$d\vec{L} = \vec{\tau}\, dt$$

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|/|\vec{L}|}{dt} = \frac{\tau_z}{L_z} = \frac{wr}{I\omega}$$

https://www.bilibili.com/video/av53768159/

https://www.youtube.com/watch?v=OgO3BlyYJZ8

https://kexue.fm/sci/mechanics/build/lesson4_4.htm

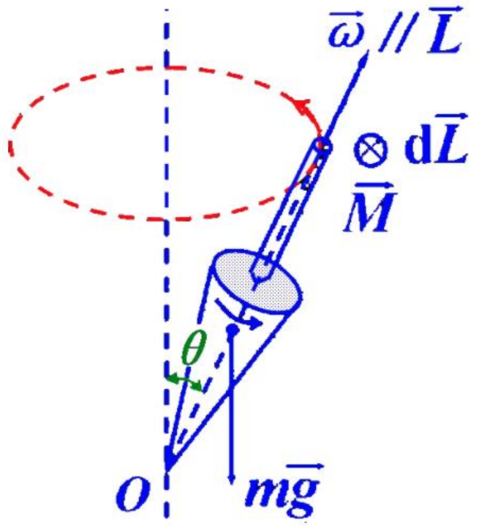
如图，陀螺的角动量就是它绕自转轴转动的角动量，其方向沿自转轴。

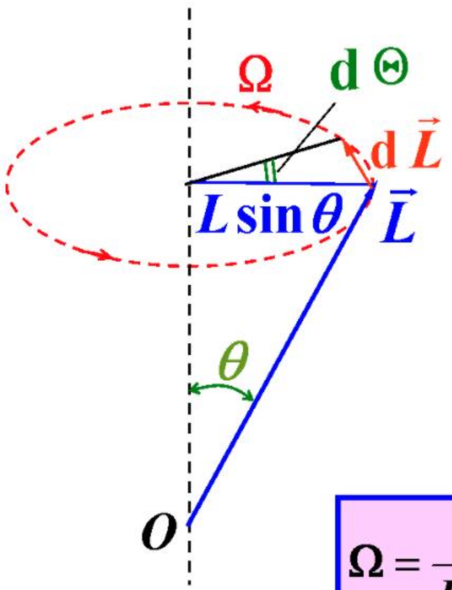
$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\,\mathrm{d}t \,/\!/\, \vec{M} \text{。}$$

$$\vec{M} \perp \vec{L} \longrightarrow \mathrm{d}\vec{L} \perp \vec{L}$$

$\Longrightarrow$ 只改变方向而不改变大小，从而产生旋进运动。





旋进角速度： $\Omega = \dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$

$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = L\sin\theta\,\mathrm{d}\Theta$$

$$M = \frac{\left|\mathrm{d}\vec{L}\right|}{\mathrm{d}t} = \frac{L\sin\theta\,\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$$

$$= L\sin\theta\cdot\Omega$$

$$\boxed{\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{M}{J\omega\sin\theta}} \propto \frac{1}{\omega}\text{，}\ \omega\uparrow\rightarrow\Omega\downarrow$$

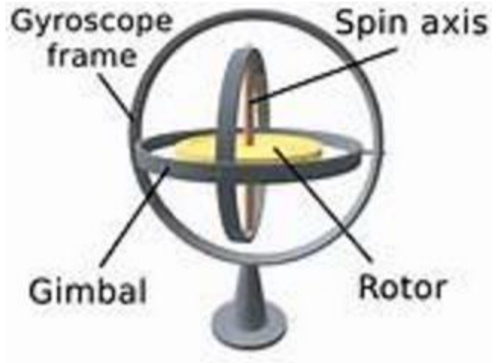
$$\boxed{\text{当 } \theta = 90^\circ \text{ 时，} \Omega = \frac{M}{J\omega}}$$

*回转仪和进动 （刚体的定点转动）

回转仪(gyroscope)：由厚而重，形状对称的刚体绕对称轴高速自转的装置。

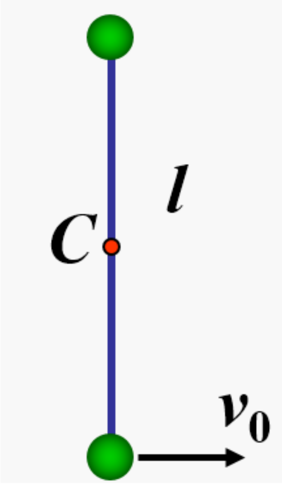
当 M =0 时，角动量及角速度矢量保持恒定
——定向回转仪。

当 回转仪受到外力矩作用时，如：陀螺倾斜——？
—— 进动(precession) —— 回转效应。



例题

二球质量均为m，轻绳，光滑水平面，求：
运动规律及绳中张力。



水平方向动量守恒 $$mv_0 = 2mv_c \Rightarrow v_c = \frac{1}{2}v_0$$

质心作匀速直线运动

系统相对质心角动量守恒

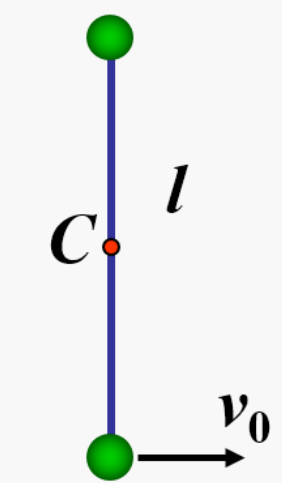
$$mv_0\frac{l}{2} = m\left(\frac{l}{2}\right)^2\omega + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_0}{l}$$

小球绕质心作匀速圆周运动

绳中的张力 $$T = m\left(\frac{l}{2}\right)\omega^2 = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{l}$$

例题 如果 细绳 变成 细杆？

细杆两头粘俩球质量均为m，杆子质量为M，光滑水平面，求：
运动规律及杆中张力。



扩展：杆有没有被固定?

没有固定转轴？
有固定转轴？固定点在中心？在黄金分割处？

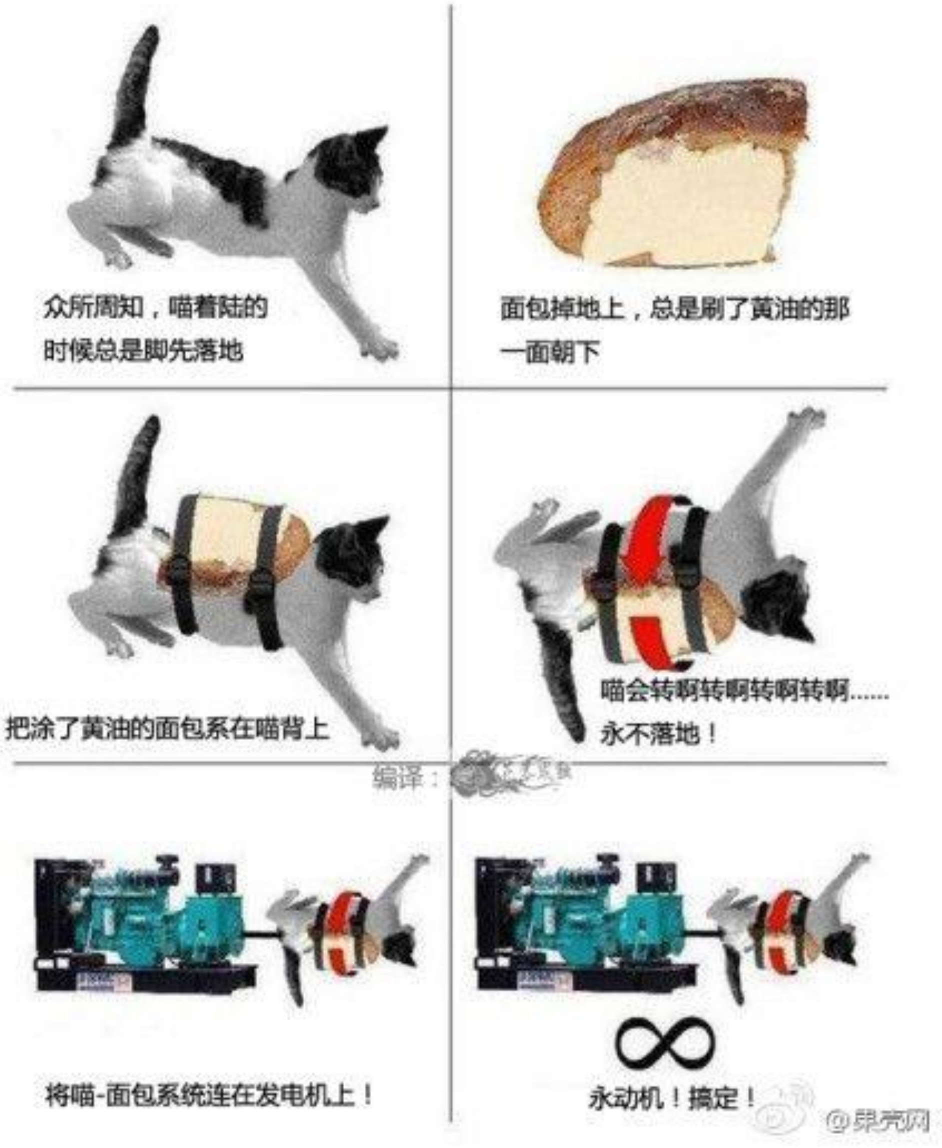
角动量守恒 和 外力的力矩

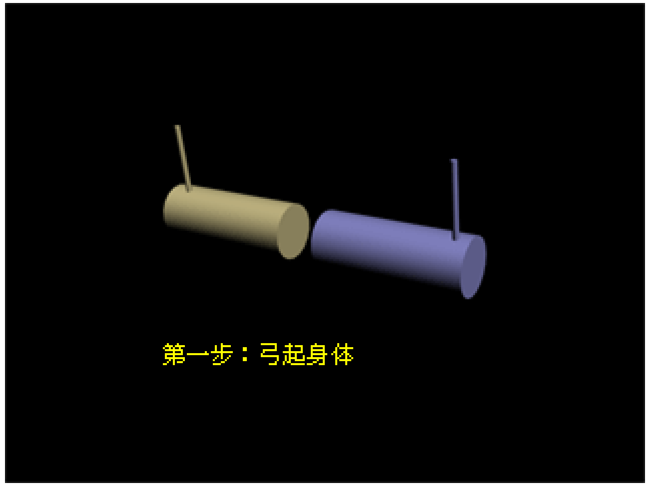
若系统由几个物体组成，当系统受到的外力对轴的力矩的矢量和为零，则系统的总角动量守恒：

$$\sum_i J_i \omega_i = \text{常量}$$

如：直升机机尾加侧向旋叶，是为防止机身的反转。

猫的转动与角动量守恒


众所周知，喵着陆的
时候总是脚先落地
面包掉地上，总是刷了黄油的那
一面朝下
把涂了黄油的面包系在喵背上
喵会转啊转啊转啊转啊……
永不落地！
编译：
将喵-面包系统连在发电机上！
永动机！搞定！
@果壳网


第一步：弓起身体

天体运动

大行星围绕太阳的运动是有规律的，丹麦天文学家开普勒在分析第谷的大量观察资料后总结出了后人以他的名字命名的开普勒三定律：

第一定律（轨道定律）：行星围绕太阳的运动轨道为椭圆，太阳在椭圆的一个焦点上；

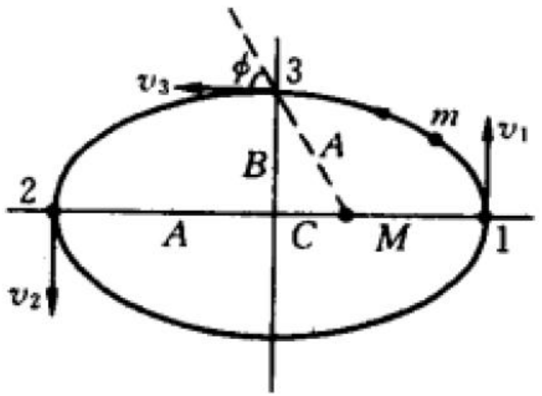
第二定律（面积定律）：行星与太阳的连线在相等的时间内扫过相等的面积；

第三定律（周期定律）：各行星椭圆轨道半长轴 A 的三次方与轨道运动周期 T 的二次方之比值为相同的常量，即

$$\frac{A^3}{T^2} = k.$$

使用守恒定律推导出开普勒第三定律

例 14 将太阳质量记为 M，行星椭圆轨道的半长轴记为 A，半短轴记为 B. 试求行星在图 4-34 中 1，2，3 处的速度大小 v_1, v_2, v_3，继而导出开普勒第三定律.



解 1，2 两处间的能量关联式和面积速度关联式分别为

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{A-C} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{A+C},$$

$$\frac{1}{2}v_1(A-C) = \frac{1}{2}v_2(A+C),$$

即可解得

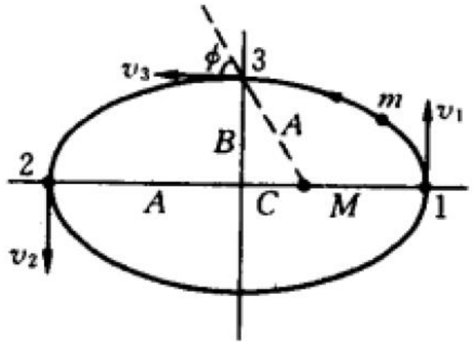
$$v_1 = \frac{A+C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}, \qquad v_2 = \frac{A-C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}.$$

在 3 处的面积速度为

$$\frac{1}{2}v_3 A\sin\phi = \frac{1}{2}v_3 B,$$

使用守恒定律推导出开普勒第三定律

例 14 将太阳质量记为 M，行星椭圆轨道的半长轴记为 A，半短轴记为 B. 试求行星在图 4-34 中 1,2,3 处的速度大小 v_1, v_2, v_3，继而导出开普勒第三定律.



由 $$\frac{1}{2}v_3 B = \frac{1}{2}v_1(A-C),$$

得 $$v_3 = \sqrt{\frac{GM}{A}}.$$

（3 处法向加速度由引力分量提供，即有

曲率半径

$$\frac{mv_3^2}{\rho_3} = \frac{GMm}{A^2}\sin\phi,\quad \rho_3 = \frac{A^2}{B},\quad \sin\phi = \frac{B}{A},\qquad 直接可得\ v_3 = \sqrt{\frac{GM}{A}}.）$$

椭圆轨道周期 $$T = \frac{\pi AB}{\frac{1}{2}v_3 B} = 2\pi A\sqrt{\frac{A}{GM}},$$

可得 $$\frac{A^3}{T^2} = k,\qquad k = \frac{GM}{4\pi^2},$$

即为开普勒第三定律.

*从开普勒定律推导出万有引力

极坐标下 $\vec{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}\quad=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=\frac{1}{r}\frac{dL}{dt}=0.$$ 开普勒第二定律

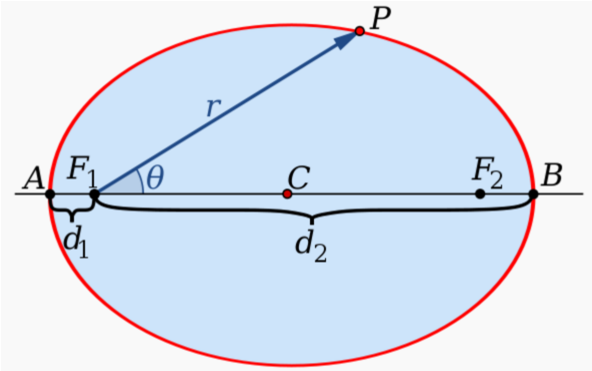
轨迹$r=\dfrac{\rho}{1+e\cos\theta}$, 开普勒第一定律

$$\dot{\theta}=\frac{L}{r^2},\frac{d}{dt}=\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}=\frac{L}{r^2}\frac{d}{d\theta},$$

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{\rho e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}=\frac{e}{\rho}r^2\sin\theta,$$

$$\dot{r}=\frac{L}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=\frac{Le}{\rho}\sin\theta,\ddot{r}=\frac{L^2e}{\rho}\frac{\cos\theta}{r^2},$$

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}=\left(\frac{L^2e}{\rho}\frac{\cos\theta}{r^2}-\frac{L^2}{r^3}\right)\hat{r}=-\frac{L^2}{\rho r^2}\hat{r}.$$



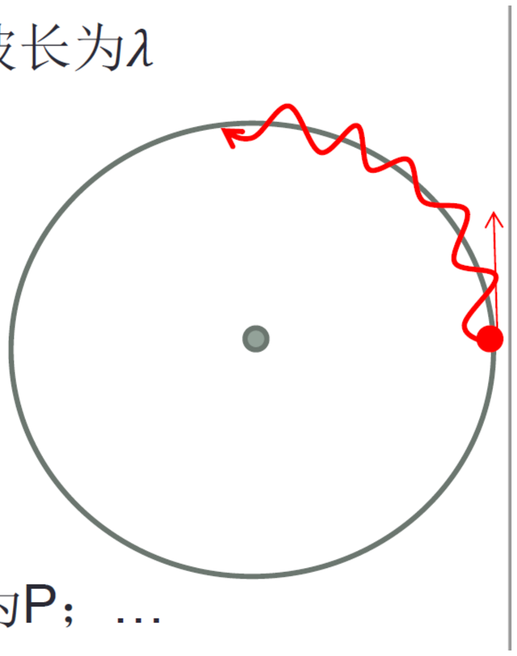
*量子力学中的角动量

- 电子绕原子核转动的角动量$L = mr^2\omega = mrv = pr$

- 在 经典 的世界里，电子的角动量可以取任意实数。在 量子 的世界里，电子的角动量只能取nh，其中n=0,1,2... 这是为什么？

  - 在微观世界中，电子的运动用波函数来描述，波长为λ
  - 为了使电子在绕原子核运动一周之后，还能与开始出发时的波函数对接上，则要求

$\frac{2\pi r}{\lambda} = n2\pi$，n=0,1,2...➔ $\frac{r}{\lambda} = n$

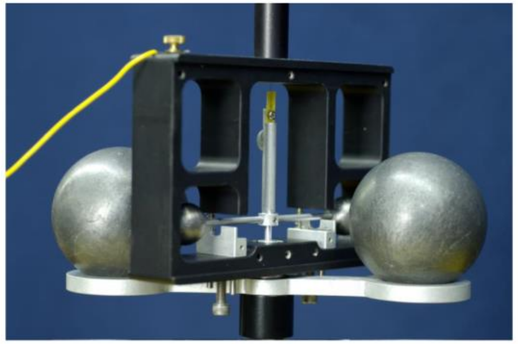


  - 而电子动量$p = h/\lambda$，其中h是普朗克常数。
  - ➔电子角动量$L = pr = \frac{hr}{\lambda} = nh$
  - n=0，角量子数标记为S；n=1，角量子数标记为P；...

万有引力

引力场：时空的几何性质（运动与质量无关）

-物质告诉时空如何弯曲；时空告诉物质如何运动。（惠勒）



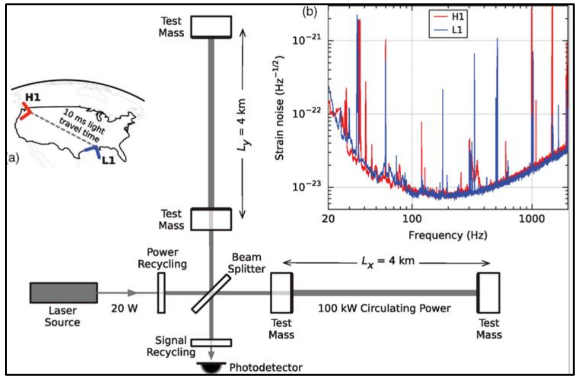
测量常数G: 卡文迪许扭秤实验

引力波：引力场传递的方式

引力场强度：基本作用中最弱的力，但是主导了天体运动，星球形成

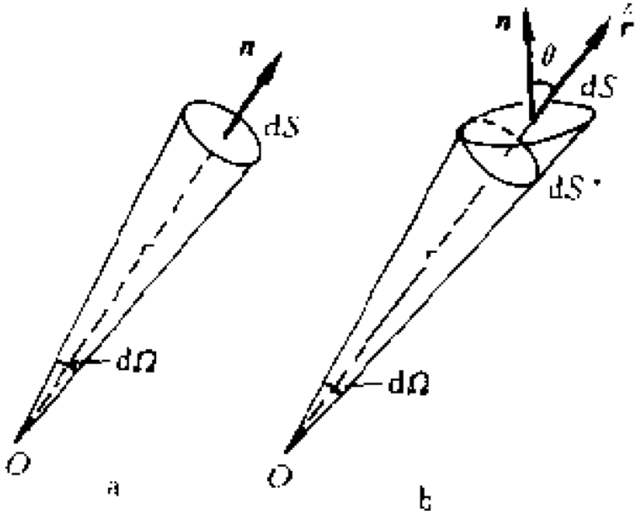
表 7－2　典型天体中心的压强

星体	平均密度 $\bar{\rho}/(g\cdot cm^{-3})$	压强 $P/(N\cdot m^{-2})$	压强 P/atm
地球	5.52	$10^{10}-10^{11}$	$10^{5}-10^{6}$
木星	1.33	$10^{12}-10^{13}$	$10^{7}-10^{8}$
太阳	1.41	$10^{14}-10^{15}$	$10^{9}-10^{10}$
白矮星	$10^{6}-10^{8}$	$10^{18}-10^{19}$	$10^{13}-10^{14}$
中子星	10^{14}	$10^{32}-10^{33}$	$10^{28}-10^{29}$



LIGO: 使用激光干涉装置， 精度10^{-21}量级

引力场的高斯定理



面元所张开的立体角 $d\Omega = \frac{\hat{r}\cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{dS * \cos\theta}{r^2}$

立体角与面积成正比，与距离成平方反比

质量m产生的引力场与距离成平方反比：

$$-GMm\frac{\hat{r}}{r^2}$$

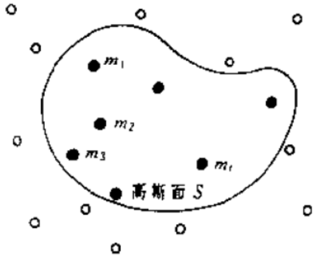
质量m产生的引力场通量与距离成平方反比，与面积成正比

$$d\Phi = -Gm\frac{\hat{r}\cdot d\vec{S}}{r^2} = -Gmd\Omega$$

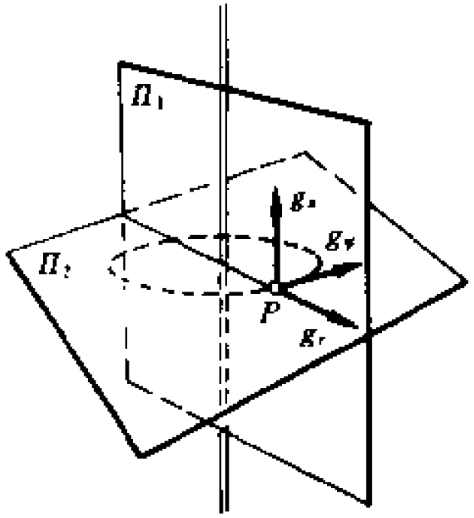
亦即，质点的引力场通过某面元 dS 的通量，正比于面元对质点所张的立体角 dΩ 和质点的质量 m. 因此，对于一个闭合曲面 S，如果它将 m 包围在内，则通过它的通量为 $\Phi = -4\pi Gm$，否则为 0.

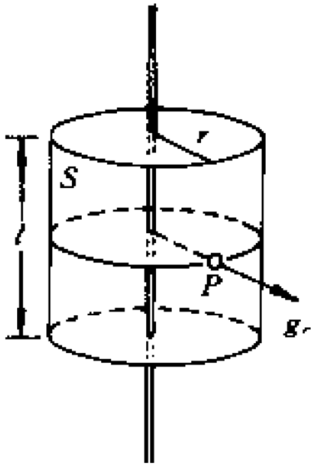
质点组通过闭合曲面S的通量为

$$\Phi = -4\pi G\sum_{i(inside\ S)} m_i$$



柱对称问题：密度均匀无穷长圆柱体产生引力场





通量计算：

首先按照通量的定义计算。在侧面场强与高斯面垂直并指向内，$\theta=\pi$，$\cos\theta=-1$，通量$\Phi_{侧}$等于$-g$乘以柱面面积$2\pi rl$；在上、下底面场强与高斯面平行，$\theta=\pi/2$，$\cos\theta=0$，故$\Phi_{底}=0$。即

$$\Phi=\Phi_{侧}+\Phi_{底}=-2\pi rlg. \qquad (a)$$

(1)P点在柱内($r<R$)：被高斯面包围的柱体体积是πr^2l，质量为$\rho\pi r^2l$，故按高斯定理有

$$\Phi=-4\pi^2G\rho r^2l, \qquad (b)$$

比较(a)、(b)两式，得

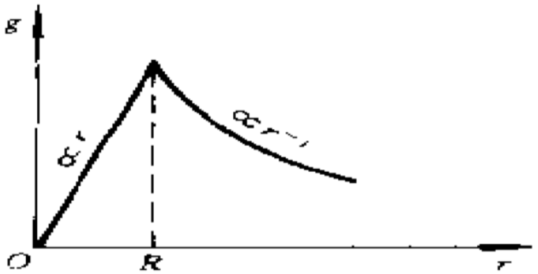
$$g=2\pi G\rho r. \qquad (c)$$

(2)P点在柱外($r>R$)：柱体的全部截面被高斯面包围，其体积为πR^2l，质量为$\rho\pi R^2l$，故按高斯定理有

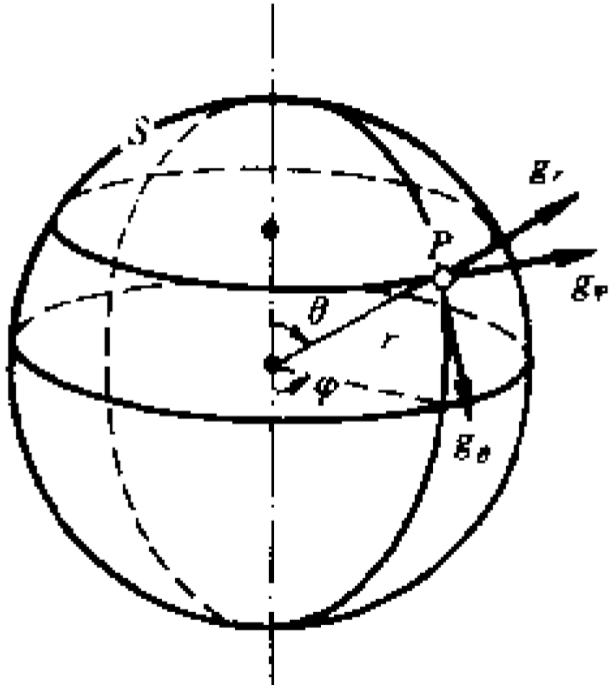
$$\Phi=-4\pi^2G\rho R^2l,$$

比较(a)、(b′)两式，得

$$g=\frac{2\pi G\rho R^2}{r}.$$

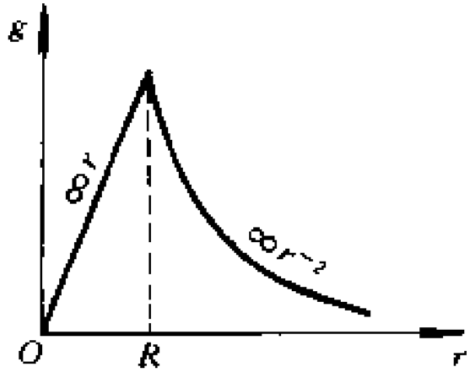


球对称问题：均匀球体产生引力场



通量： $\Phi = -4\pi r^2 g.$

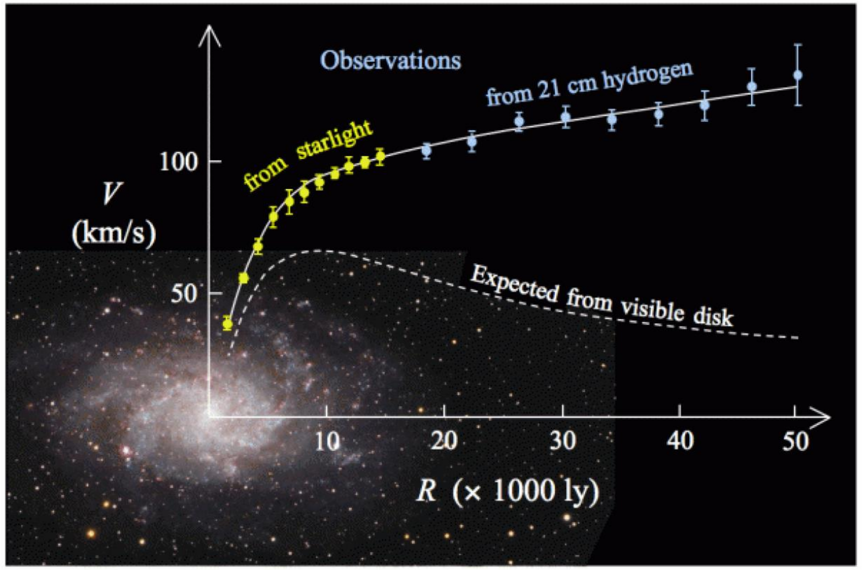
$$\begin{cases} g = \dfrac{4\pi G\rho}{3} r, & (r < R) \\ g = \dfrac{4\pi G\rho R^3}{3\, r^2} = \dfrac{GM}{r^2}, & (r > R) \end{cases}$$



球体对其外部物体的引力，如同质量分布于球心。

推论：空心球壳对于位于其内部物体的引力之和为零。

万有引力不能解释之谜



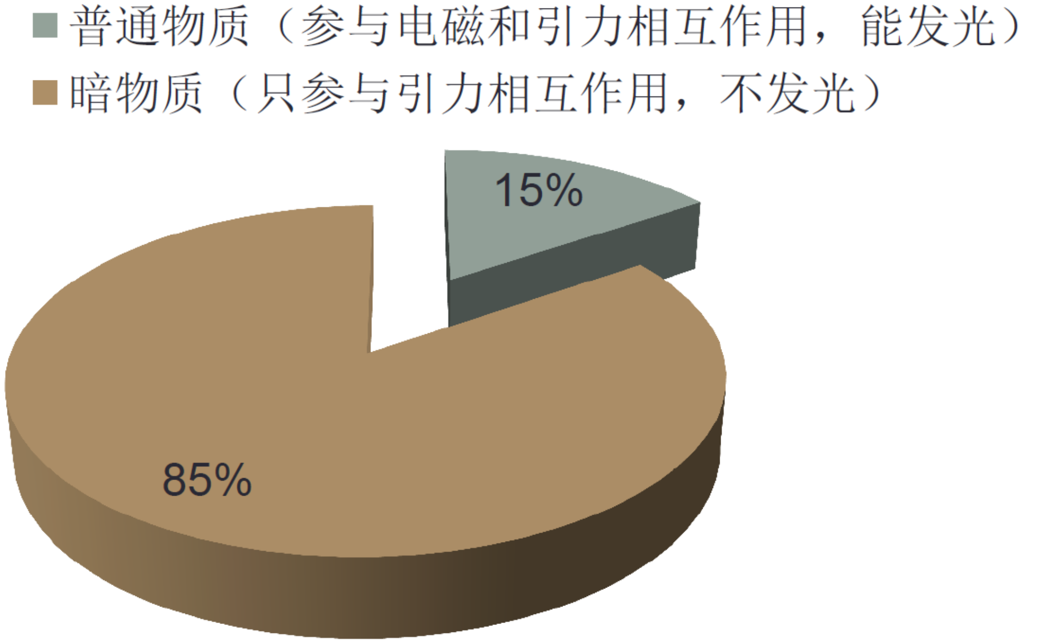
星系旋转曲线（Galaxy rotation curve）
图片来源： Mark Whittle of the University of Virginia.

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{mV^2}{r}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

牛顿万有引力定律预测，离星系中心越远，恒星转动速度越低。

为什么测量到的速度这么奇怪？



https://tech.sina.cn/d/tk/2018-12-01/detail-ihpevhcm5944716.d.html?from=wap