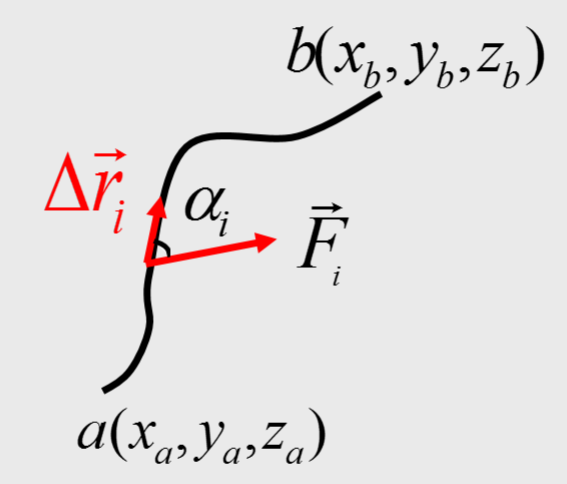
# 动量与冲量

# 冲量

做功，力对空间的积累效应

$$A=\sum_i F_i\,cos\alpha_i|\Delta\vec{r}_i|=\sum_i \vec{F}_i\cdot\Delta\vec{r}_i$$




功是一个标量

位移与参照系有关，故功与参照系有关

动能定理：净合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

冲量，力对**时间**的积累效应？

对应的是什么？与空间积累有什么不同？在不同惯性系是否普适？
意味着什么物理量的增加？对应守恒律吗？能推广吗？

# 冲量

冲量(impulse): 力的时间积累，$\vec{J} = \vec{F}\Delta t$ ←→ 做功的数学描述：$A = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$

积分形式，$\int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}_i dt$

这是一个矢量

在牛顿力学中，时间不随参考系变化改变，冲量不随参考系改变。

累积的效果：

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = \int_{t_0}^{t_1} m\vec{a} dt = \int_{v_0}^{v_1} m d\vec{v} = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0$$

同样只和初末状态有关，与中间过程无关

动量(momentum): $\vec{p} = m\vec{v}$ ←→ 动能：$\frac{1}{2}mv^2$

# 质点动量定理

动量定理的积分形式：$\boxed{\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot dt = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{p} - \vec{p}_0}$

微分形式：　$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F} \cdot \mathrm{dt}$　　隐含的假设$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$　　问题：$\mathrm{d}m$ 哪儿来的?

冲量等于动量的改变

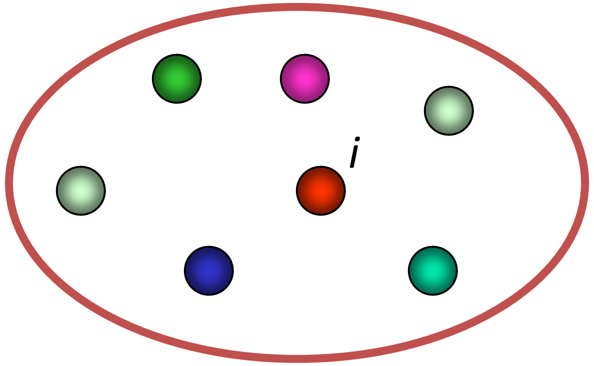
**说明：**

(1) 反映了力在时间上的累积作用对质点产生的效果。

(2) 动量定理中的动量和冲量都是矢量，符合矢量叠加原理。或以分量形式进行计算。

(3) 适用于惯性系，在非惯性系中，只有添加惯性力的冲量后才成立

# 质点系的动量定理




设有$N$个质点构成一个系统，

第$i$个质点：

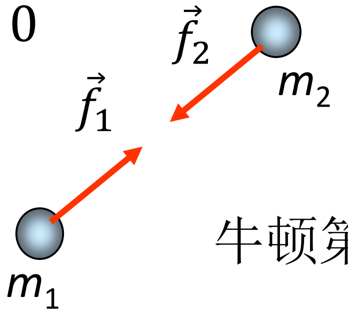
质量$m_i$ 内力$\vec{f}_i$ 外力$\vec{F}_i$ 初速度$\vec{v}_{i0}$ 末速度$\vec{v}_i$

由质点动量定理，对第$i$个质点：$\int_{t_0}^{t}\left(\vec{F}_i+\vec{f}_i\right)\mathrm{d}t=m_i\vec{v}_i-m_i\vec{v}_{i0}$

对系统：

$$\sum \vec{f}_i = 0$$

$$\int_{t_0}^{t}\left(\sum \vec{F}_i+\sum \vec{f}_i\right)\mathrm{d}t=\sum m_i\vec{v}_i-\sum m_i\vec{v}_{i0}$$




牛顿第三定律

$$\therefore \quad \int_{t_0}^{t}\sum \vec{F}_i\mathrm{d}t=\vec{P}-\vec{P}_0=\Delta\vec{P}$$

# 质点系的动量定理和动量守恒定律

质点系动量定理：质点系统所受合外力的冲量等于系统总动量的增量。

积分形式：$\boxed{\int_{t_0}^{t}\sum\vec{F}_i dt=\vec{P}-\vec{P}_0=\Delta\vec{P}}$ 微分形式：$\sum\vec{F}_i=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$

动量守恒定律：系统所受合外力为零时，系统的总动量保持不变。

$$\boxed{\text{当}\sum\vec{F}_i=0\ \text{时，}\quad \vec{P}=\sum m_i\vec{v}_i=\text{常矢量}}$$

(1) 动量守恒是指系统动量总和不变，但系统内各个质点的动量可以 通过内力进行传递和交换。

(2) 当外力作用远小于内力作用时，可近似认为系统的总动量守恒。（如：碰撞、打击等）

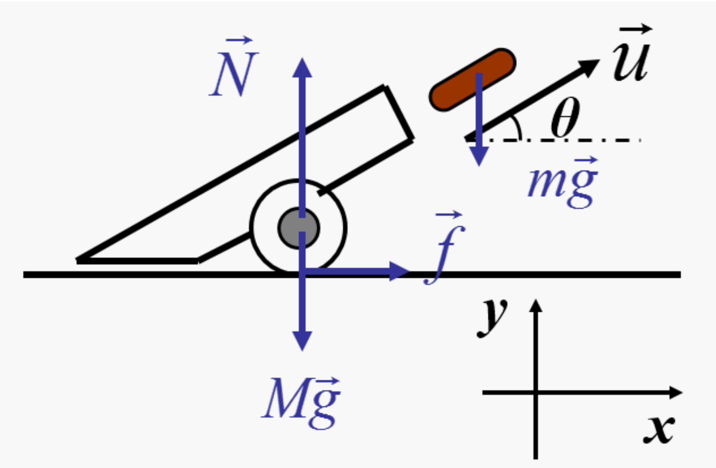
(3) 定律不仅适合宏观物体，同样也适合微观领域。（量子力学）

# 动量守恒定律的隐含条件

- 要求作用力和反作用力同时产生：事实并不如此。
- 电磁相互作用，作用力的传递速度是有限的（光速）。因此会在短暂的时间内，动量守恒定律“失效”。
- 引力相互作用，作用力的传递速度也是有限的，动量守恒定律同样在短暂的时间内“失效”。
- 因此需要将作用场的动量考虑进来，动量守恒定律依然能够成立。

# 例题

炮车的质量为*M*，炮弹的质量为*m*。若炮车与地面有摩擦，摩擦系数为$\mu$，炮弹相对炮身的速度为*u*， 求炮身相对地面的反冲速度 *v* 。




解：选取炮车和炮弹组成系统进行内、外力分析。
水平的动量是否守恒？

运用质点系的动量定理：

$$\int_0^{\tau}(M\vec{g}+m\vec{g}+\vec{N}+\vec{f})\mathrm{dt}=M\vec{v}+m(\vec{v}+\vec{u})$$

分量形式：*x*方向： $$\int_0^{\tau} f\mathrm{dt}=-Mv+m(-v+u\cos\theta)$$

分量形式：*y*方向： $$\int_0^{\tau}(N-Mg-mg)\mathrm{dt}=mu\sin\theta$$

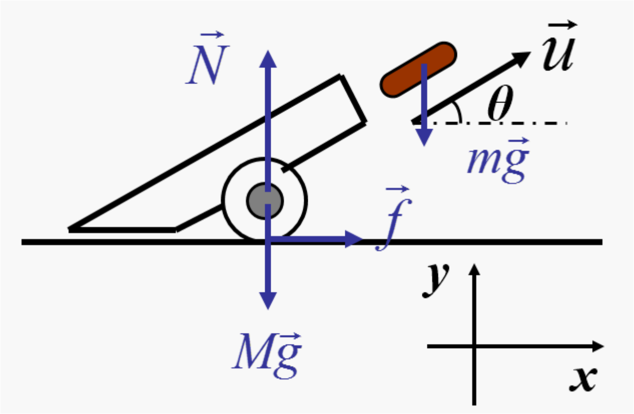
f, N – 变力 v.s. 常力？

# 例题

$$\int_0^{\tau} f\mathrm{dt} = -Mv + m(-v + u\cos\theta)$$

$$\int_0^{\tau} (N - Mg - mg)\mathrm{dt} = mu\sin\theta$$

$\because \tau$ 很短，$N >> (Mg + mg)$ $\int_0^{\tau} N\,\mathrm{dt} = mu\sin\theta$




$f = \mu N$

$$\Rightarrow \quad -(M + m)v + m\,u\cos\theta = \mu\, m\, u\sin\theta$$

$$v = \frac{mu(\cos\theta - \mu\sin\theta)}{M + m}$$

自锁现象，即 $v$=0 时 $\cot\theta = \mu$

# 变质量系统

● **增质型**

如图 2-40 所示，$t$ 时刻主体质量 $m$，速度 $\boldsymbol{v}$，受力 $\boldsymbol{F}$，将被吸附的质量为 $\mathrm{d}m$，速度为 $\boldsymbol{v}'$，

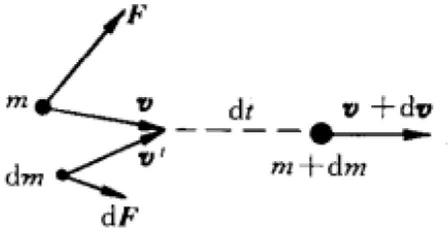



图 2-40

受力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$，经 $\mathrm{d}t$ 时间主体质量增为 $m+\mathrm{d}m$，速度增为 $\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$. 据质点系动量定理有

$$(\boldsymbol{F}+\mathrm{d}\boldsymbol{F})\mathrm{d}t=(m+\mathrm{d}m)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})-(m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'\mathrm{d}m),$$

略去高阶小量，得

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.37)$$

● **减质型**

参考图 2-41，$t$ 时刻质量 $m$ 速度 $\boldsymbol{v}$ 的主体受力 $\boldsymbol{F}$，经 $\mathrm{d}t$ 时间，质量减为 $m+\mathrm{d}m$ ($\mathrm{d}m<0$)，速度变为 $\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$，与主体分离部分的质量为 $-\mathrm{d}m>0$，速度为 $\boldsymbol{v}'$. 由动量定理得

$$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=[(m+\mathrm{d}m)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})+(-\boldsymbol{v}'\mathrm{d}m)]-m\boldsymbol{v},$$

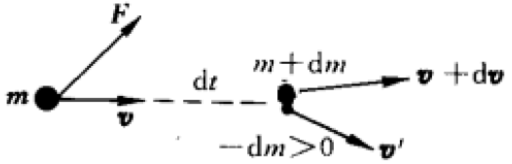



图 2-41

改写成

$$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=(m+\mathrm{d}m)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})-(m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'\mathrm{d}m).$$

与增质型公式比较，只是少了 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ 项，因是高阶小量可略，两者在形式上一致，同样可得

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t},$$

两者形式一致

引入相对速度/分离速度

$\vec{u}=\vec{v}-\vec{v}'$

# 火箭的速度公式

只计重力： $$F=-m_1 g=m_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}$$

设 $t$=0 时， $v$=$v_0$ ， $m_1$=$m_{10}$， 任一时刻 $t$ 时为 $v$ 和 $m_1$。

$$\int_0^t -g\mathrm{d}t=\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v+u\int_{m_{10}}^{m_1}\frac{\mathrm{d}m_1}{m_1}$$

$$-gt=v-v_0-u\ln\frac{m_{10}}{m_1}$$

$$v=v_0+u\ln\frac{m_{10}}{m_1}-gt$$

# 火箭的速度公式

不计重力： $\boxed{v = v_0 + u\ln\frac{m_{10}}{m_1}}$ $\boxed{v_{\max} = v_0 + u\ln\frac{m_{10}}{m_{1\min}}}$

提高火箭速度的途径： (1) $u\uparrow$ ， (2) $\frac{m_{10}}{m_{1\min}}\uparrow$

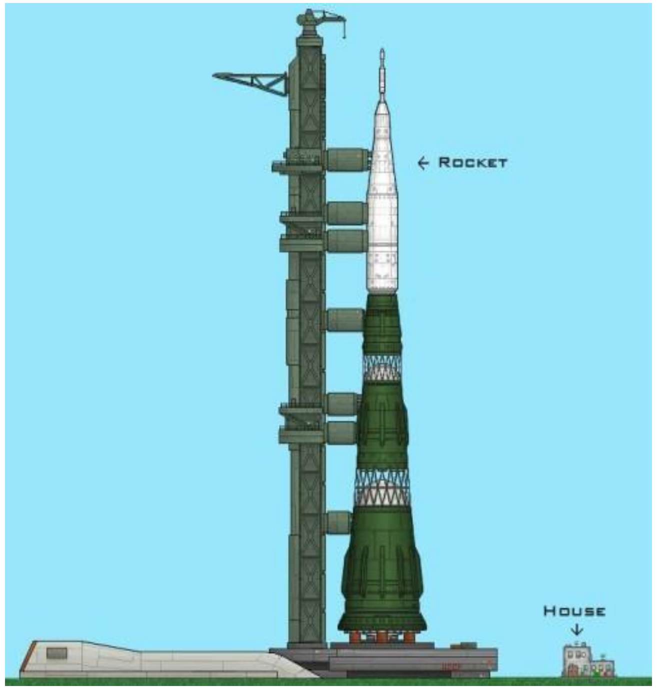
- 当 $v_0$ =0， $u$ =2000 m/s 时，要达到第一宇宙速度 $v=v_1$=7.9 km/s，须有： $m_{10}/m_{1\min} \approx 50$
- 目前技术只有： $u$ =2500 m/s， $m_{10}/m_{1\,\min}$=10 。

采用多级火箭技术： $v_1 = u\ln N_1$ $v_2 - v_1 = u\ln N_2,$ $v_3 - v_2 = u\ln N_3, \cdots$

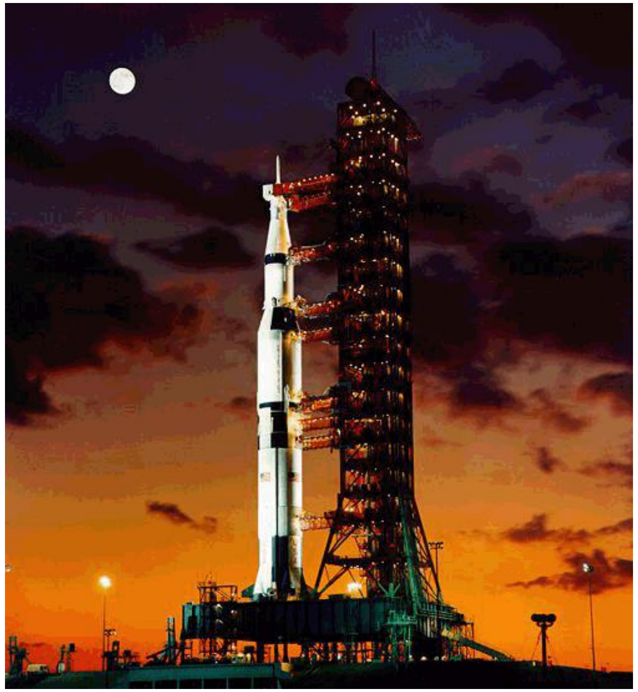
$$\boxed{v = \sum_i u\ln N_i = u\ln(N_1 N_2 N_3 \cdots)}$$

# 火箭发射的“沉重”代价

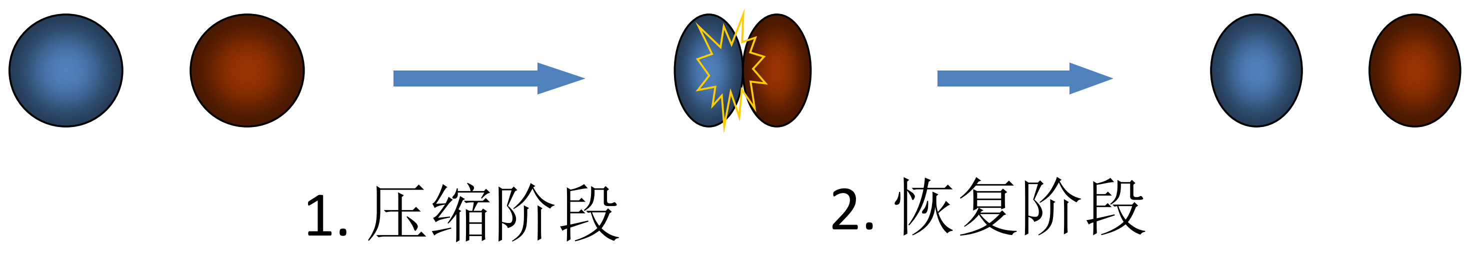
苏联N1运载火箭
火箭类型：五级重型运载火箭
直径17米，高度105 米
火箭重2735吨，低地轨道载荷：75吨




美国土星5号运载火箭
火箭类型：三级液体燃料重型运载火箭
高度110.6米,直径10.1米
质量3039吨，低地轨道载荷：119吨



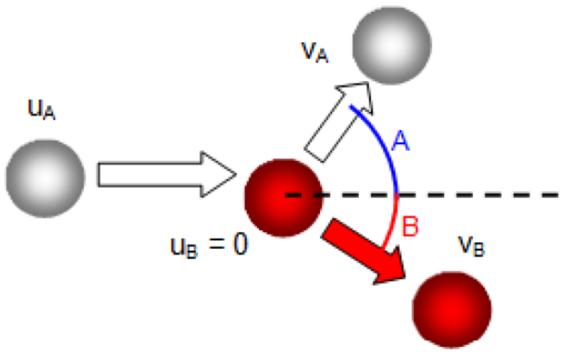
# 碰撞问题

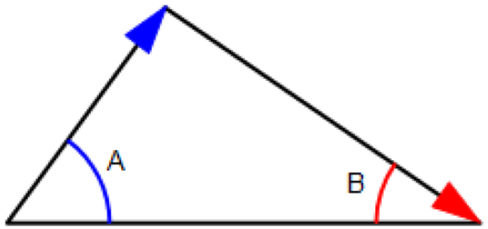



- 弹性碰撞：碰撞后物体的形变可以完全恢复，且碰撞前后系统的总机械能守恒。
- 非弹性碰撞：碰撞后物体的形变只有部分恢复，系统有部分机械能损失。
- 完全非弹性碰撞：碰撞后物体的形变完全不能恢复，两物体合为一体一起运动。系统有机械能损失。

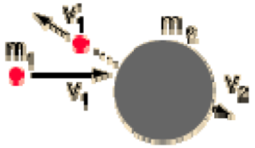
# 碰撞问题：应用

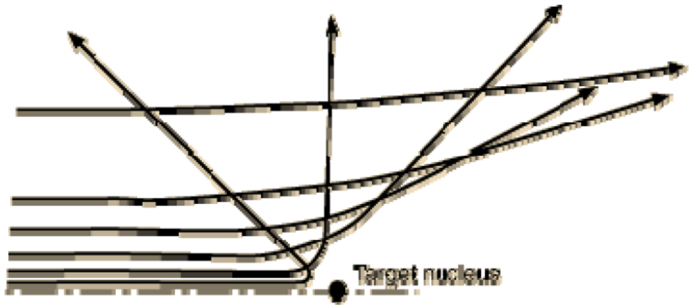
- 球形刚体完全弹性碰撞问题(Snooker)




- 粒子碰撞：从散射截面分布获得粒子的信息




- 恒星在星系中的运动：动力学摩擦和两体弛豫

# 一维弹性碰撞

动量守恒： $m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$

动能守恒： $\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_{10} + 2 m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_{20} + 2 m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{v_2 - v_1 = v_{10} - v_{20}}$$

# 一维弹性碰撞

1. 当$m_1$=$m_2$时， 则: $v_1 = v_{20}$ $v_2 = v_{10}$

在一维弹性碰撞中，质量相等的两个质点在碰撞中交换彼此的速度。

2. 若$v_{20}$=0，且 $m_2$>>$m_1$，则: $v_1 \approx -v_{10}$ $v_2 \approx 0$

质量很小的质点与质量很大的静止质点碰撞后，调转运动方向，而质量很大的质点几乎保持不动。

3. 若$v_{20}$=0， 且$m_2$<<$m_1$， 则: $v_1 \approx v_{10}$ $v_2 \approx 2v_{10}$

质量很大的入射质点与质量很小的静止质点碰撞后速度几乎不变，但质量很小的质点却以近两倍的速度运动起来。

# 一维非弹性碰撞

动量守恒： $m_1v_{10}+m_2v_{20}=m_1v_1+m_2v_2$

机械能不再守恒

**极限弹性**

$$\boxed{v_2-v_1=v_{10}-v_{20}}$$

**极限非弹性**

$$\boxed{v_2-v_1=0}$$

$$\boxed{e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}}$$

——恢复系数

**弹性碰撞： $e=1$ （$v_2$-$v_1$） ＝ （$v_{10}$-$v_{20}$）**

**非弹性碰撞： $0<e<1$**

**完全非弹性碰撞： $e=0$ $v_2=v_1$**

# 一维非弹性碰撞

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

碰后两球的速度：

$$v_1 = v_{10} - m_2 \frac{(1+e)(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = v_{20} + m_1 \frac{(1+e)(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$$

机械能损失：

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = -\frac{1}{2}(1 - e^2)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{10} - v_{20})^2$$

# 二维/三维碰撞：质心参照系

1、质心系：在碰撞问题中质心系是惯性系

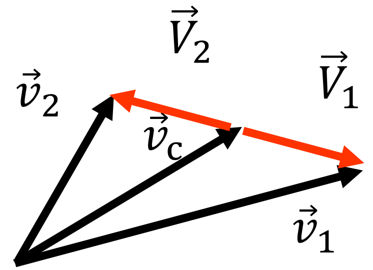
2、质心系中系统总动量恒为零 $\vec{V}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_c$ $\vec{v}_c = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} \qquad \sum_i m_i \vec{V}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i - \sum_i m_i \vec{v}_c = 0$$

质心系中，在碰撞前后两质点动量始终大小相等，方向相反

$$\vec{V}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$\vec{V}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_c = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$



# 质心参考系研究碰撞

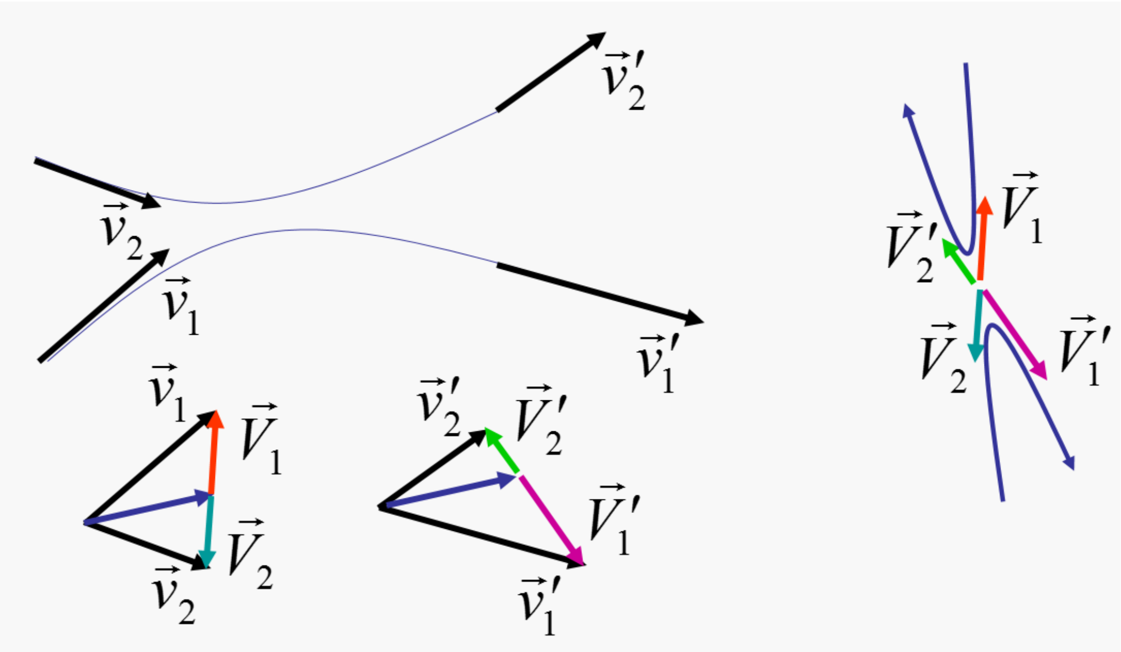
$$\vec{p}_1 = m_1\vec{V}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu\vec{v}$$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{V}_2 = \frac{-m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = -\mu\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i \vec{p}_i = 0$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$ —— 折合质量

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$ —— 相对速度

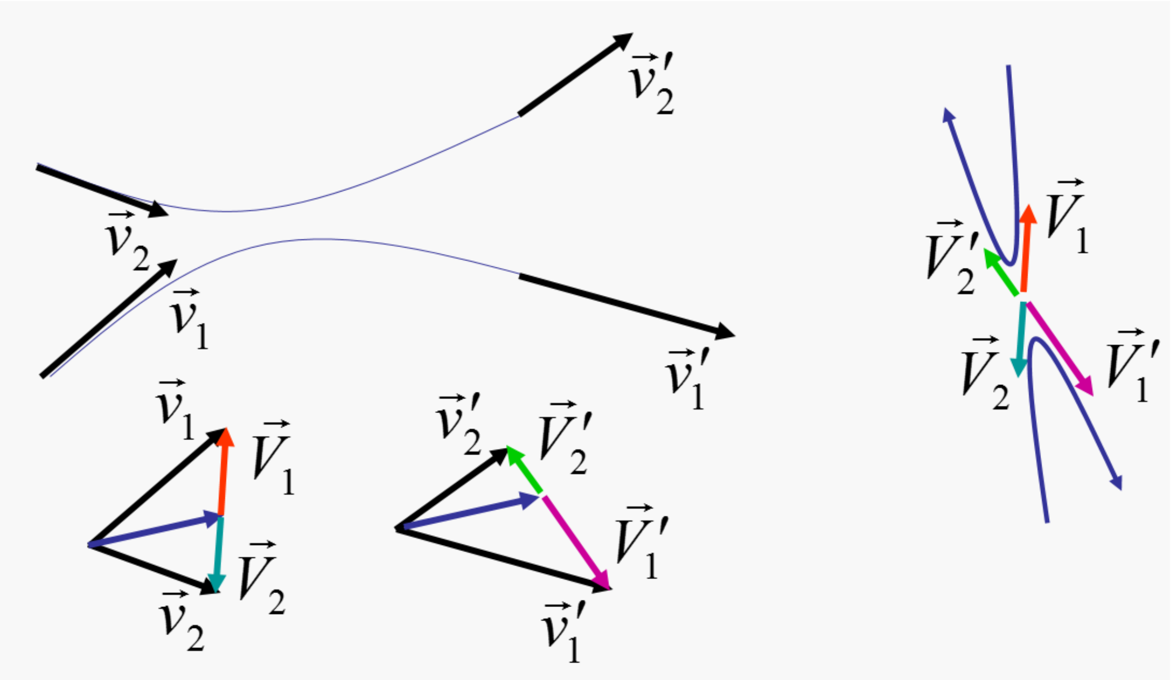


# 碰撞的一般处理-质心参考系

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2 = 0$$

$$\begin{cases} m_1 V_1 = -m_2 V_2 \quad m_1 V'_1 = -m_2 V'_2 \\ e = \dfrac{V'_2 - V'_1}{V_1 - V_2} \end{cases}$$ 恢复系数

$$\Rightarrow \quad V'_1 = -eV_1 \quad V'_2 = -eV_2$$



# 碰撞的一般处理-质心参考系

碰撞中的能量损失

$$\Delta E=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2-\left(\frac{1}{2}m_1{V'}_1^2+\frac{1}{2}m_2{V'}_2^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}m_1V_1^2(1-e^2)+\frac{1}{2}m_2V_2^2(1-e^2)$$

利用 $\vec{V}_1=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)$ $\vec{V}_2=\dfrac{-m_1}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)$

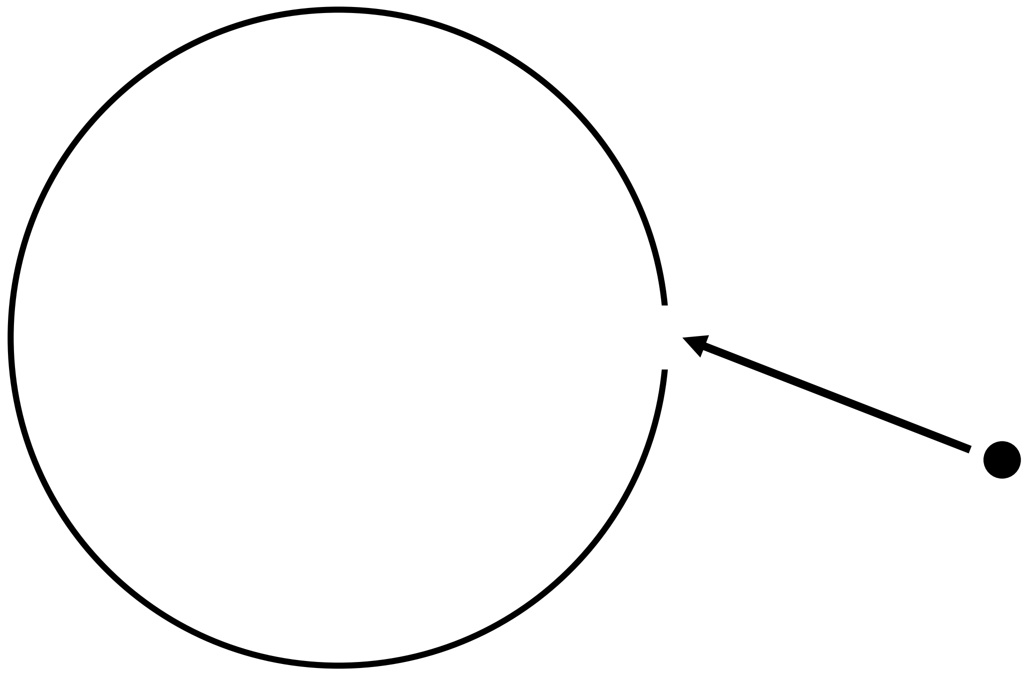
$$\Delta E=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2(1-e^2)=\frac{1}{2}\mu v^2(1-e^2)$$

相对质心的总动能

$e=1$ $\Delta E=0$ $e=0$ $\Delta E=\dfrac{1}{2}m_1V_1^2+\dfrac{1}{2}m_2V_2^2$

完全非弹性碰撞后，
质点相对质心系静止

## 小球与圆环



圆环固定在平面上。

小球入射到环里，发生一系列弹性碰撞，然后还要从环里出来，入射角度应该是多少？

如果圆环可以在光滑平面上滑动呢？

# 水滴在云里下坠

*……就像水消失在水里。*
——博尔赫斯

假设水滴始终是球型的，忽略空气阻力，水滴从静止下落，下落过程中吸附遇到的所有水分子

求水滴的运动方程
长时间后水滴匀加速运动，求它的加速度

# 三体

仅通过引力作用，三个质量都为M的星球就能够沿着同一圆形轨道运动，轨道半径为R，求星球沿轨道转一圈所用的时间。

如果把三个同质量的星球换成不同质量的星球，三个星球可以绕着质心转动它们还有办法保持相对位置不变吗？

# 小结

做功，动能
动能定理
保守力，势能
功能原理
内力，质点系的功能原理

质心，质心运动定理
柯尼希定理

冲量，动量
动量定理

动量守恒定律
内力，质点系的动量定理
变质量系统的动量定理
碰撞问题，弹性/非弹性碰撞
质心参考系，质心运动定理