功，动能，势能和能量守恒

质点动力学回顾

- 直角坐标系、极坐标系、自然坐标系
- 参考系、伽利略变换
- 牛顿三大运动定律
- 引力、重力、弹性力、摩擦力、流体阻力
- 牛顿第二定律的瞬时性
- 动量守恒，对称性和守恒量

- 非惯性系和非惯性力
- 旋转参考系，向心力、科里奥利力

- 运用牛顿定律解题

我滑下你的暮色如厌倦滑下一道斜坡的虔诚。

——博尔赫斯

能量：

一个相对抽象的概念

能量：可以通过做功从一个物理系统转移到另一个物理系统的间接物理量
做功：通过沿物体的位移施加作用力来转移能量

一个深刻的物理概念

- 与时间对偶，对应新的守恒律（能量守恒）
- 引入了势、标量场的概念，可以取代力的图像（理论力学）
- 与质量同源，可以互相转化（相对论）
- 可以推广到微观世界（量子力学、量子场论）

从力到能量：

如何描述能量的转移？

做功，力对空间的积累效应

特殊情形：直线运动，$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$　　单位：焦耳(Joule, J), $kg\ m^2\ s^{-2}$

做功是**和参考系相关**的，
即使都是惯性系，**每个力**的做功也可以是不同的。

问题：在不同的惯性参考系里，能量是否守恒？

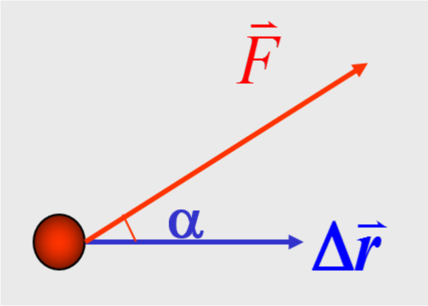
功：力的空间积累（积分）效应

功是度量能量转换的基本物理量，它描写了力对空间的积累效应。

一般情形：

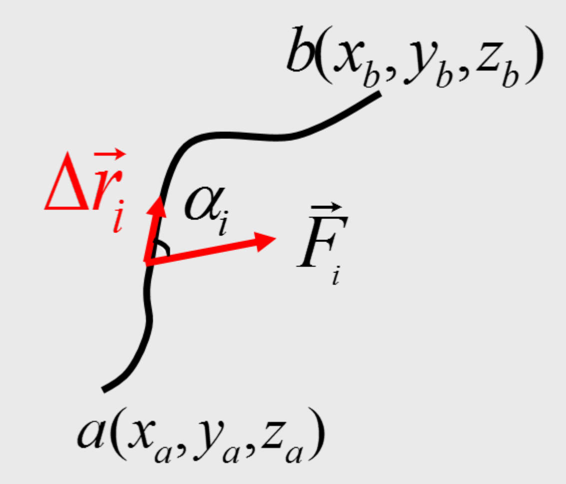
恒力的功： $A = F\cos\alpha\,|\Delta\vec{r}|$

$$= \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$



变力的功： $\Delta A_i = F_i\cos\alpha_i|\Delta\vec{r}_i|$

$$A = \sum_i F_i\cos\alpha_i|\Delta\vec{r}_i| = \sum_i \vec{F}_i\cdot\Delta\vec{r}_i$$



功是一个标量

功的计算

$$\boxed{A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F \cos\alpha \, ds}$$

1. 一般情况下，功与力和路径有关

直角坐标系： $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$$A = \int_{x_a}^{x_b} F_x dx + \int_{y_a}^{y_b} F_y dy + \int_{z_a}^{z_b} F_z dz$$

自然坐标系： $A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F_t |d\vec{r}| = \int_a^b F_t ds = \int_a^b F \cos\theta \, ds$

2. $\vec{F}$ 与参照系无关，但位移与参照系有关，故A与参照系有关。

功的计算

3. 合力的功等于各分力的功的代数和。

$$A=\int_a^b\Big(\sum_i \vec{F}_i\Big)\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum_i\int_a^b \vec{F}_i\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum_i A_i$$

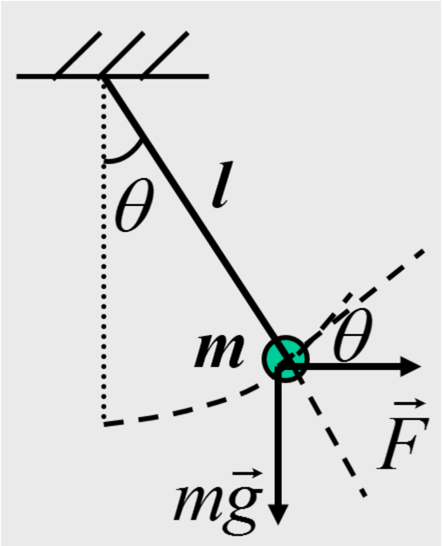
4. 平均功率 $\bar{P}=\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$

瞬时功率 $P=\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$ 瓦特(Watt, W)=(J/s)

例题：变力做功

小球在水平变力 $\vec{F}$ 作用下缓慢移动，即在所有位置上均近似处于力平衡状态，直到绳子与竖直方向成θ角。

求：(1) $\vec{F}$ 的功，(2) 重力的功。



解：$F\cos\theta = mg\sin\theta$　　　$F = mg\tan\theta$

$$F_{\mathrm{t}} = mg\tan\theta\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$A_F = \int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int F_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\theta} mg\sin\theta\ \ l\mathrm{d}\theta$$

$$= mgl(1-\cos\theta)$$

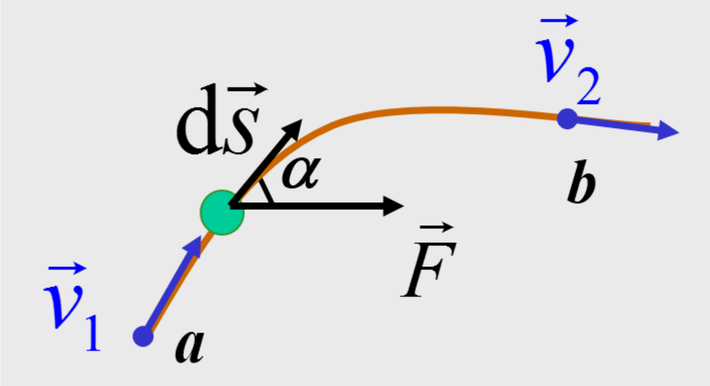
变力做功

$$A_{mg} = \int m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{\theta} -mg\sin\theta\ \ l\mathrm{d}\theta = -mgl(1-\cos\theta)$$

恒力　曲线运动

质点的动能定理

设质点m在力的作用下沿曲线从a点移动到b点



$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s$$

$$F\cos\alpha = ma_{\mathrm{t}} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}A = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = mv\mathrm{d}v$$

总功： $A = \int \mathrm{d}A = \int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = E_{\mathrm{k}b} - E_{\mathrm{k}a}$

总功由起始+终末的状态确定，与中间过程无关

质点的动能定理

净合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

$$\boxed{A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{kb} - E_{ka}}$$

1. 合外力的功是动能变化的量度。 $A > 0 \rightarrow E_{\mathrm{k}b} > E_{\mathrm{k}a}$, $A < 0 \rightarrow E_{\mathrm{k}b} < E_{\mathrm{k}a}$
2. A, E_{k}与参考系有关，不同惯性系里它们的大小是不一样的
3. 动能定理只在惯性系中成立。
4. 微分形式： $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$, $\vec{F} \cdot \vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}$

则质点在非惯性系中的动能定理应叙述为：质点在非惯性系中相对动能的改变，等于作用于质点的真实力与牵连惯性力在相对运动轨迹上所作功之和。即

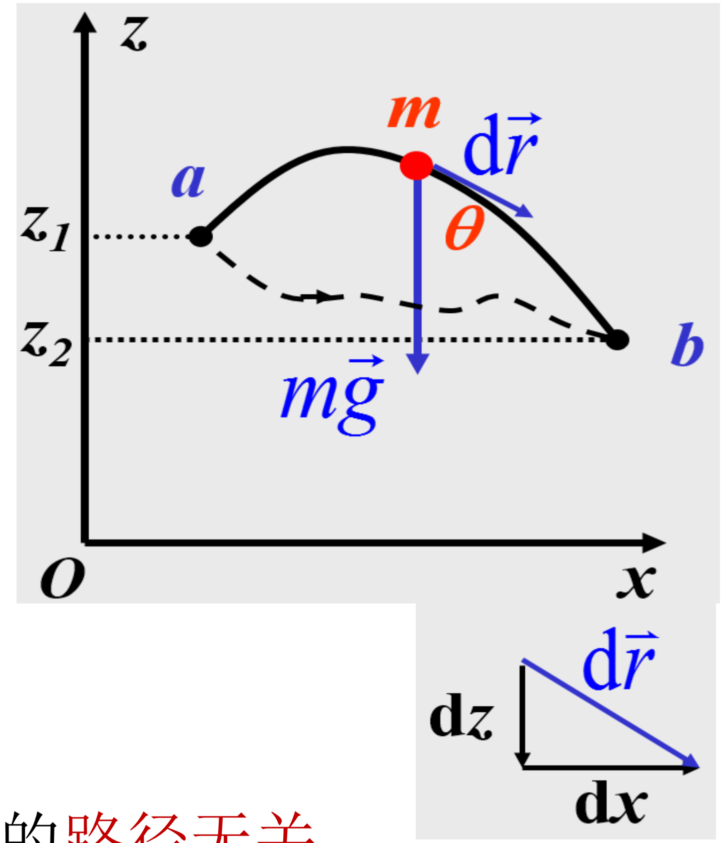
几种常见力的做功：重力

$$\mathrm{d}A = m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{k} \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}A = -mg\vec{k}\cdot(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}z\vec{k}) = -mg\mathrm{d}z$$

$$\boxed{A = -mg\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z = mgz_1 - mgz_2}$$



➢ 重力作功由质点起始+终末的位置确定，与所经过的路径无关。

几种常见力的做功：万有引力

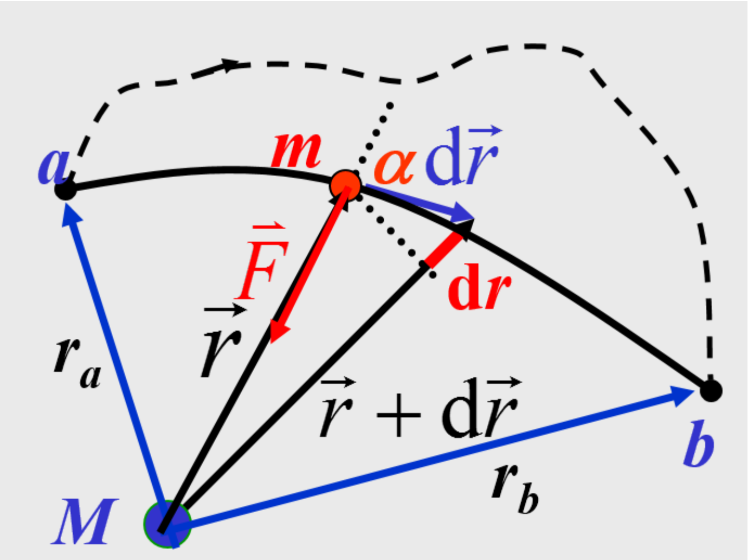
设质量为M的质点固定，另一质量为m的质点在M的引力场中从a点运动到b点。

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

$$A = \int_{r_a}^{r_b} -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = r|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\alpha = r\mathrm{d}r$$

$$\boxed{A = -GMm\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -GMm\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)}$$



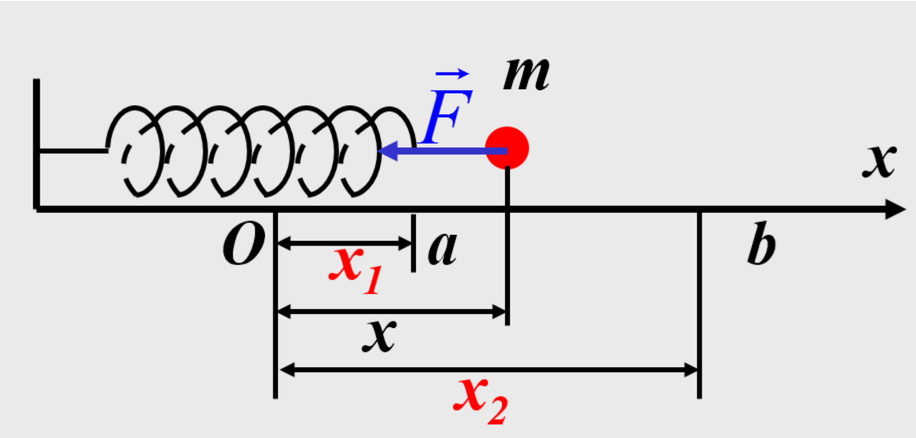
- 万有引力的功由质点起始+终末的位置确定，与所经过的路径无关。

几种常见力的做功：弹性力

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$A = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\vec{i} \cdot \mathrm{d}x\vec{i} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2}$$



- 弹性力的功由质点起始+终末的位置确定，与所经过的路径无关。

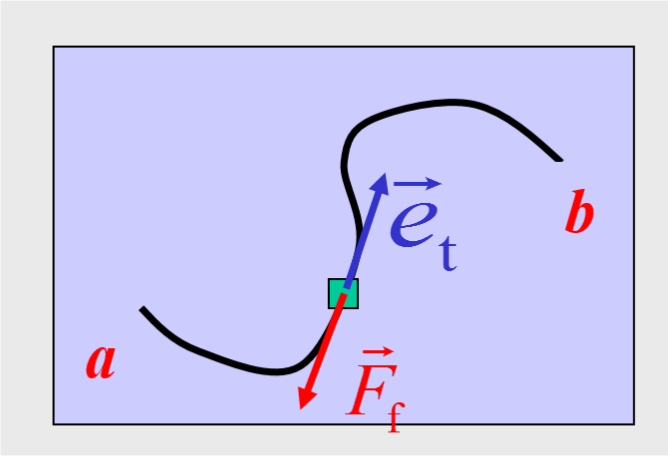
几种常见力的做功：摩擦力

$$\vec{F}_{\mathrm{f}} = -\mu m g \vec{e}_{\mathrm{t}}$$

$$a \to b$$

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{f}} = \int_a^b -mg\mu \vec{e}_{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_a^b -mg\mu \mathrm{d}s = -F_{\mathrm{f}} S_{ab}$$



- 摩擦力做功~~由质点起始+终末的位置确定，与所经过的路径无关。~~
  与路径有关！

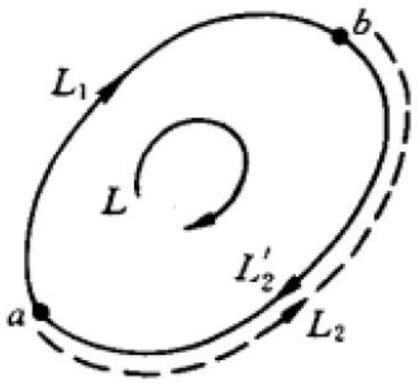
保守力与非保守力

保守力：保守力的功由质点起始+终末的位置确定，与所经过的路径无关。

如：重力，引力，弹性力等。

$$\int_{L_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{L_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

$$\int_{L_2'} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{L_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{L_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \quad \text{或} \quad \int_{L_2'} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{L_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$



$$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

- 保守力沿任何闭合路径作功等于零。

非保守力：作功不仅与始末位置有关，还与路径有关的。比如摩擦力。

(一对)摩擦力作功始终是负的，又称为耗散力。

势能

保守力的功由质点起始+终末的位置确定，与所经过的路径无关。

可以定义一个标量场$E_p(r)$来描述保守力的做功，势能

势能只与位置有关

物体在保守力场中a，b两点的势能E_{pa}，E_{pb}之差等于质点由a点移动到b点过程中保守力做的功A_{ab}。

$$E_{\mathrm{pa}} - E_{\mathrm{pb}} = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = A_{ab}$$

保守力的功是势能变化的量度，等于系统势能的减少。

$$\boxed{A_{ab} = -(E_{\mathrm{pb}} - E_{\mathrm{pa}}) = -\Delta E_{\mathrm{p}}}$$

质点从 $\boldsymbol{r}_a$ 到 $\boldsymbol{r}_b$：势能减少量 ＝ 保守力作功量 ＝ 动能增加量，

势能的例子

保守力的功：

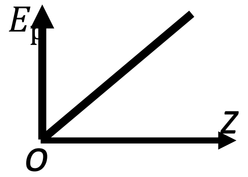
$$A_{ab} = mg(z_a - z_b) = -(E_{\mathrm{p}b} - E_{\mathrm{p}a})$$

$$A_{ab} = GMm\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) = -(E_{\mathrm{p}b} - E_{\mathrm{p}a})$$

$$A_{ab} = \frac{1}{2}k{x_a}^2 - \frac{1}{2}k{x_b}^2 = -(E_{\mathrm{p}b} - E_{\mathrm{p}a})$$

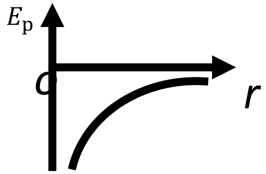
恰当指定参考点的势能值：

重力势能 $z_b = 0$ $E_{\mathrm{p}b} = 0$ $E_{\mathrm{p}} = mgz$



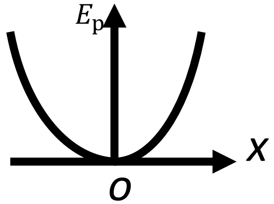
重力势能曲线

引力势能 $r_b = \infty$ $E_{\mathrm{p}b} = 0$ $E_{\mathrm{p}} = -\dfrac{GMm}{r}$



引力势能曲线

弹性势能 $x_b = 0$ $E_{\mathrm{p}b} = 0$ $E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}kx^2$



弹性势能曲线

关于势能的说明

- 势能是相互作用有保守力的系统的属性。

- 势能的大小只有相对的意义，相对于势能零点而言。势能零点可以任意选取。

设空间 $\vec{r}_0$ 点为势能零点，则空间任意一点 $\vec{r}$ 的势能为：

$$E_{\mathrm{p}}(\vec{r}) = E_{\mathrm{p}}(\vec{r}) - E_{\mathrm{p}}(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

➢ 空间某点的势能E_{p}在数值上等于质点从该点移动到势能零点时保守力作的功。

- 非惯性系中，通过引入合适的惯性力，也能有惯性势能的概念

已知势能，如何求(保守)力?

1. 积分关系 $E_{\mathrm{p}} = \int_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

2. 微分关系 $\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$

通过一个标量场来描述矢量

一维情形

$$\mathrm{d}A = F_x \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$\boxed{F_x = -\frac{dE_{\mathrm{p}}}{dx}}$$

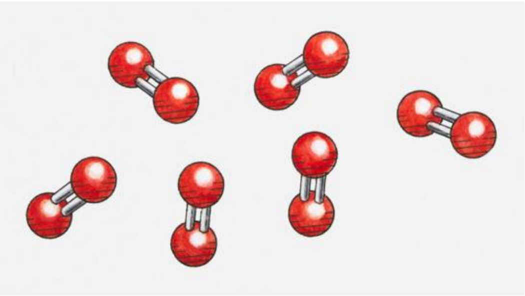
三维情形

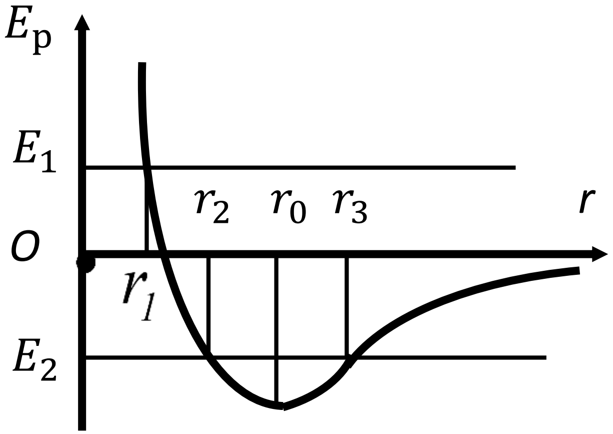
$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}}$$

例：双原子分子的势能曲线





$$F(r_1) = -\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_1} > 0$$

$$F(r_0) = -\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0} = 0$$

兰纳–琼斯势（英語：**Lennard-Jones potential**），又称**L–J势**, **6–12势**, 或**12–6势**，是用来模拟两个电中性的分子或原子间相互作用势能的一个比较简单的数学模型。最早由数学家约翰·兰纳–琼斯于1924年提出。由于其解析形式简单而被广泛使用，特别是用来描述惰性气体分子间相互作用尤为精确。

兰纳–琼斯势能以两体距离为唯一变量，包含两个参数。其形式为：

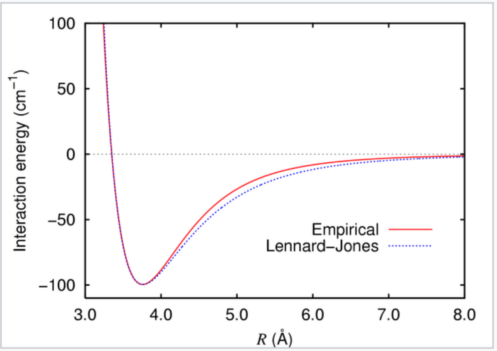
$$V(r) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$

ε等于势能井的深度，σ是互相作用的势能正好为零时的两体距离。在实际应用中，ε、σ参数往往通过拟合已知实验数据或精确量子计算结果而确定。 另一种写法是：

$$V(r) = \epsilon\left[\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{6}\right]$$

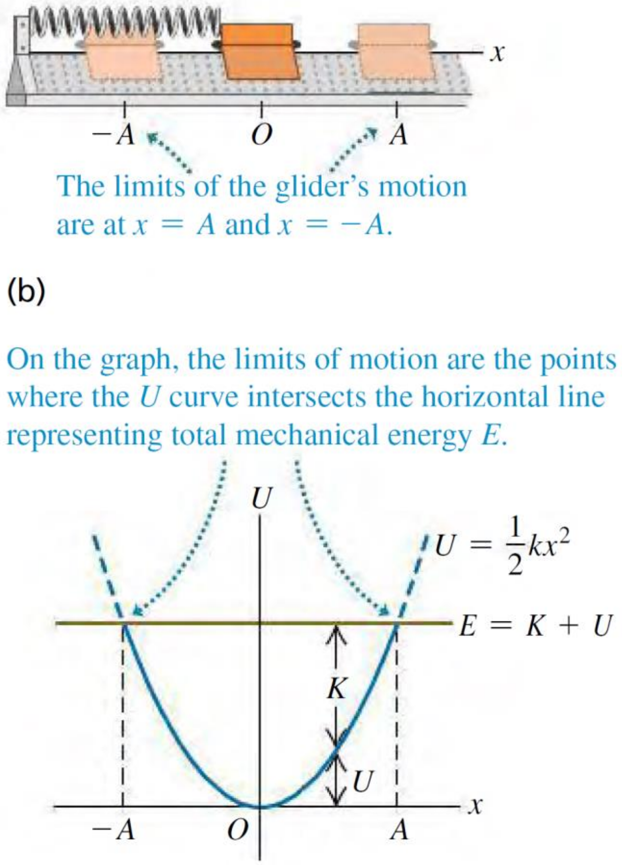
$r_{\min} = 2^{1/6}\sigma$是在势能井时底两体间距离。

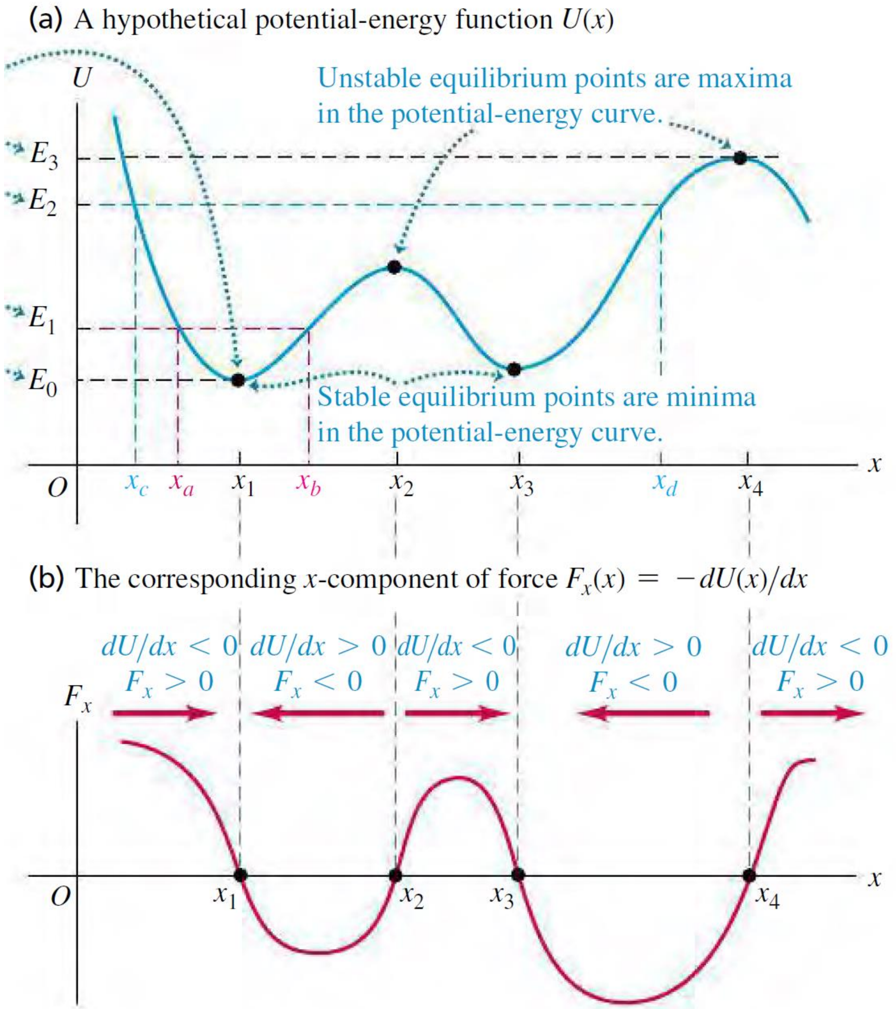
从物理意义上讲，第一项 $1/r^{12}$ 可认为是对应于两体在近距离时以互相排斥为主的作用，第二项 $1/r^{6}$ 对应两体在远距离以互相吸引（例如通过范德瓦耳斯力）为主的作用，而此六次方項也的確可以使用以電子–原子核的電偶極矩微擾展開得到。但讀者尤須記住，兰纳–琼斯势本身只是一个近似公式。



对应两个氩原子之间作用的兰纳–琼斯势（藍色），与红色的经验公式值相差很小。

例：energy diagram





任意形式的保守力，

势能只和位置有关

机械能定理（功能原理）

动能定理

$$\boxed{A=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=E_{kb}-E_{ka}}$$

保守力的势能

$$\boxed{A_P=E_{Pa}-E_{Pb}}$$

$$A=A_N+A_P=A_N-\Delta E_\mathrm{P}$$

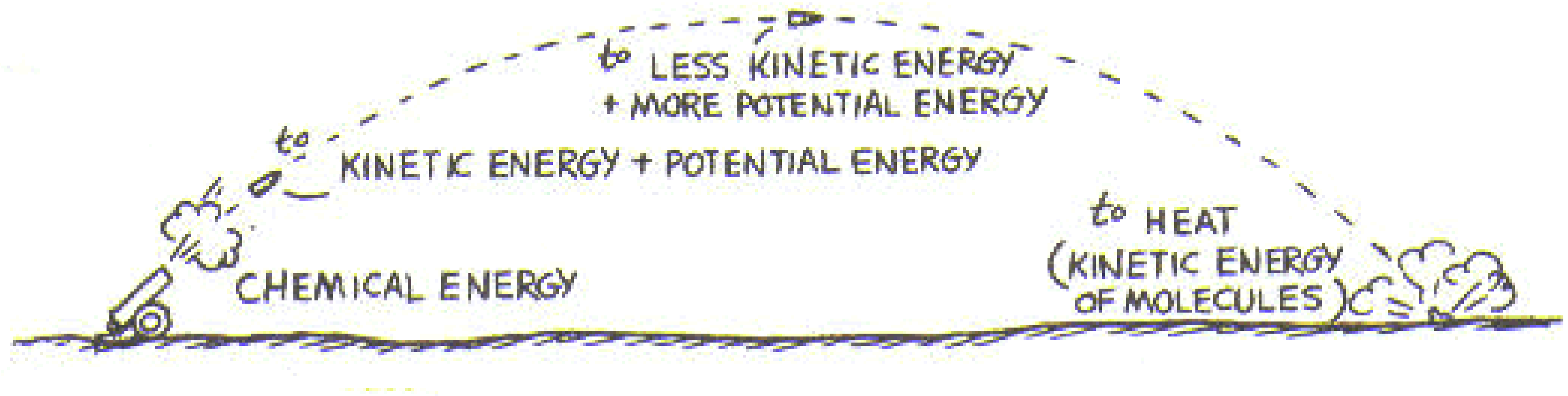
$$A_N=\Delta E_\mathrm{P}+\Delta E_\mathrm{K}=(E_{\mathrm{P}b}+E_{\mathrm{K}b})-(E_{\mathrm{P}a}+E_{\mathrm{K}a})$$

若$A_N=0$， $E_{Pb}+E_{Kb}=E_{Pa}+E_{Ka}$

如果非保守力做的功不为0， 那么a b两处的机械能不相等

能量的转换和守恒定律

非保守力做的功去哪儿了?



Energy Cannot Be Created or Destroyed

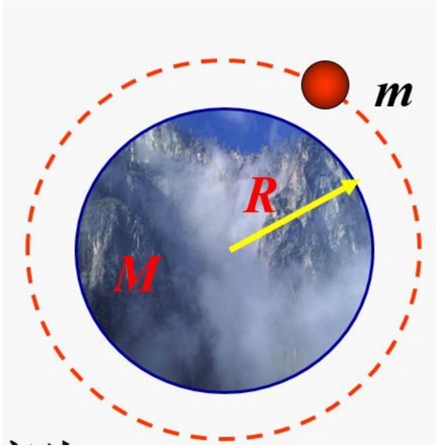
(It just changes forms)

思考：为什么电磁相互作用是保守力，但是因此带来的摩擦力是非保守力?

1. 在微观层面处理每一个原子，摩擦力也是保守力。
2. 在宏观层面处理，引入统计概念，摩擦作为不可逆过程。

例：计算第一宇宙速度

已知：地球半径为R，质量为M，卫星质量为m。要使卫星在距地面h 高度绕地球作匀速圆周运动，求其发射速度。



解：　设发射速度为v_1，绕地球的运动速度为v。

机械能守恒：
$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R+h}$$

万有引力提供向心力：
$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$$

得：
$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R} - \frac{GM}{R+h}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{gR(2 - \frac{R}{R+h})}$$

$\because \quad h << R$　　第一宇宙速度

$$\boxed{v_1 \approx \sqrt{gR} = 7.9 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

例：计算第二宇宙速度

宇宙飞船脱离地球引力而必须具有的发射速度。

(1) 脱离地球引力时，飞船的动能必须大于或等于零。

(2) 脱离地球引力处，飞船的引力势能为零。

由机械能守恒：
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{R} = E_{\mathrm{k}\infty} + E_{\mathrm{p}\infty} = 0$$

得：
$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1 = 11.2 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

质点系 - 从一个到几个

et bientôt nous serons dix mille et puis cent mille
Nous serons des millions

——*Notre-Dame de Paris (Musical)*

质点系的功能关系

与质点不同：系统内两质点间可以有相互作用力

质点动能定理 $A_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$　　　其中 $A_i = \underset{\text{外力}}{A_{ie}} + \underset{\text{内力}}{A_{i\mathrm{I}}}$

对系统内所有质点求和 $\sum_i A_{ie} + \sum_i A_{i\mathrm{I}} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$

(1) 总动能 $E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 \neq \frac{1}{2}\sum_i m_i\, v_c^2$　　v_c：质心的速度

(2) 外力对系统所作的功是指每一个外力所作功之和，而非合外力所作的功。

合力为0， 做功不为0

质点系的功能关系

(3) 一对内力的功：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}_{ij}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_i + \vec{F}_{ji}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_j$$

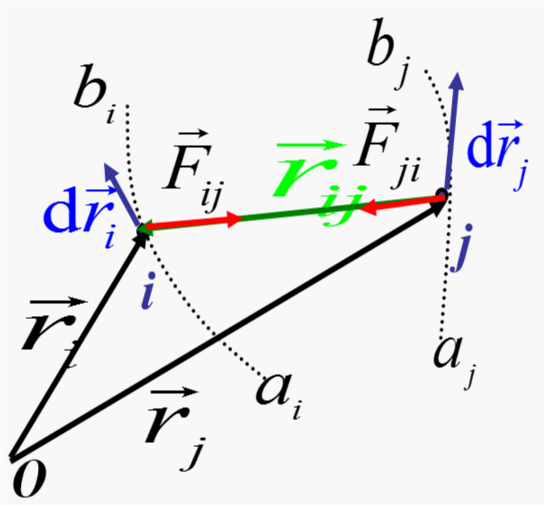
$$= \vec{F}_{ij}\cdot (\mathrm{d}\vec{r}_i - \mathrm{d}\vec{r}_j)$$

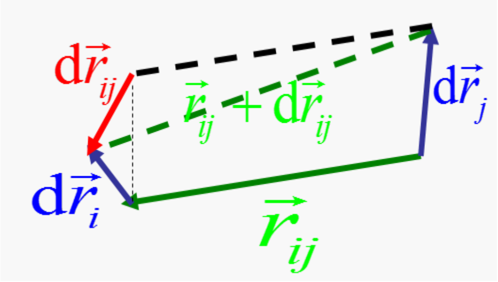
$$= \vec{F}_{ij}\cdot \mathrm{d}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ 相对位矢

$\mathrm{d}\vec{r}_{ij} = \mathrm{d}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ 相对元位移

$$\boxed{\mathrm{d}A = \vec{F}_{ij}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_{ij}}$$



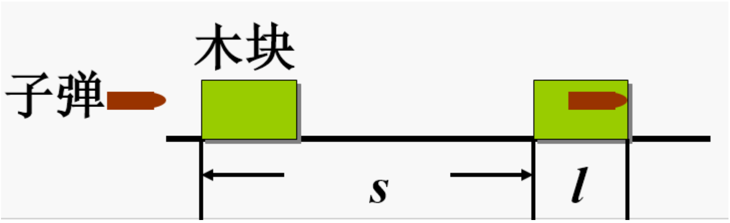


质点系的功能关系

因此，一对内力的功：

1. 系统内一对内力的功一般不为零
2. 一对内力做功之和与所选的参照系无关
3. 一对内力做功之和只与相对位移有关

[例] 一颗子弹穿入厚为l的木块后停留在木块的前部，同时木块在桌面上向前移动了s距离，求这一过程中子弹与木块之间的摩擦力所做的总功。



地面参考系：$A_{f1}=f\cdot s$ 木块　　$A_{f2}=-f\cdot(s+l)$ 子弹

木块参考系：$A_{f1}=0$ 木块　　$A_{f2}=-f\cdot l$ 子弹

子弹参考系：$A_{f1}=-f\cdot l$ 木块　　$A_{f2}=0$ 子弹

$$A_f=A_{f1}+A_{f2}=-f\cdot l$$

质点系的功能原理　　能量守恒定律

内力的总功 A_{I}

保守内力的总功 A_{CI}

非保守内力的总功 A_{NI}

E_p 质点系势能

E_k 质点系动能

$$A_e + A_{\mathrm{NI}} + A_{\mathrm{CI}} = E_k - E_{k0} = \Delta E_k$$

$$A_{\mathrm{CI}} = -(E_p - E_{p0}) = -\Delta E_p$$

$$\boxed{A_e + A_{\mathrm{NI}} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})}$$

$$= E - E_0 = \Delta E$$

质点系的功能原理： 质点系在运动过程中，所有外力的功和非保守内力的功的总和等于系统机械能的增量。

质点系的功能原理　能量守恒定律

1. 适用于惯性系。

2. 若 $A_e = 0,\ A_{NI} = 0$　　$\Delta E = 0 \Rightarrow E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}$　机械能守恒定律

- 系统中的动能和势能可以转换，各质点间的机械能也可以互换，但保持系统的总机械能不变。
- 在某一惯性系中机械能守恒，但在另一惯性系中机械能不一定守恒。

A_{NI}与参照系无关，而A_e与参照系有关。

3. 对孤立系统

若$A_e = 0$，则 $\boxed{A_{NI} = \Delta E}$　能量转换和守恒定律

质心系 - 几个到无穷多个

质心系

质心：质心是与质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心。

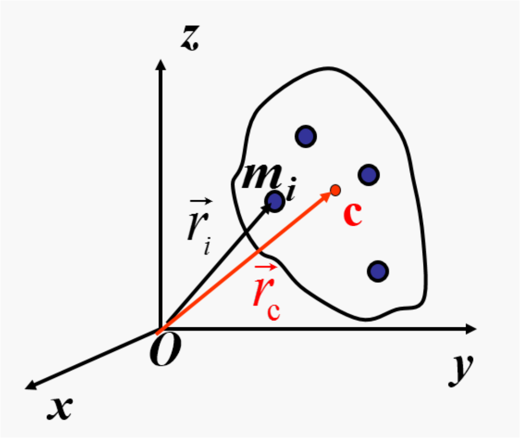
$$\vec{r_c} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r_i}$$

$$\vec{v_c} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{v_i}$$

$$\vec{v}_i' = \vec{v_i} - \vec{v_c}$$

质量连续分布的物体：

$$\boxed{\vec{r}_\mathrm{c} = \frac{\int \vec{r}\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}}$$



求质心的积分运算

分量式： $x_c = \frac{\int xdm}{\int dm}$ $y_c = \frac{\int ydm}{\int dm}$ $z_c = \frac{\int zdm}{\int dm}$

质量线分布： $dm = \rho_l dl$ 线积分

质量面分布： $dm = \rho_s ds$ 面积分

质量体分布： $dm = \rho dV$ 体积分

例子：半圆环的质心

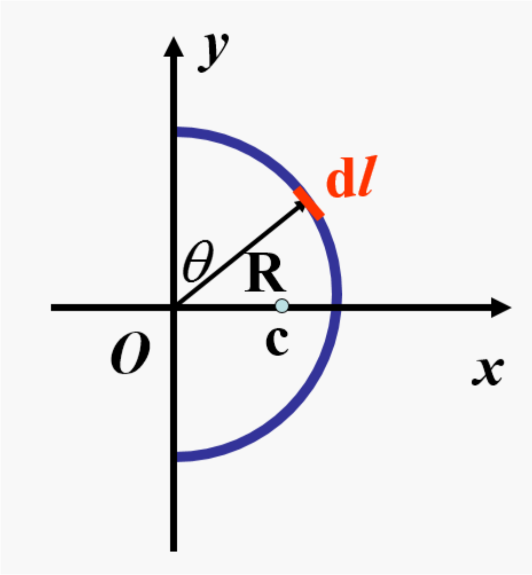
解：

$$dm = \rho_l dl = \rho_l R d\theta$$

$$x_c = \int x dm/m$$

$$= \int x\rho_l R d\theta/\pi R\rho_l$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} R\sin\theta\, d\theta = \frac{2R}{\pi}$$



➢ 质心不一定位于物体内部。

质心运动定理

由质心位矢公式： $\vec{r}_c=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

$$\vec{v}_c=\frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t}=\sum_i m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\Big/\mathrm{M}=\sum_i m_i\vec{v}_i/M \Rightarrow \boxed{\mathrm{M}\vec{v}_c=\sum_i m_i\,\vec{v}_i}$$

质点系的动量，如同所有质量集中于质心，速度为质心运动速度

质心坐标系：

$$\vec{r}_c\equiv 0\ \ \rightarrow \vec{v}_c=0\ \rightarrow \sum_i m_i\,\vec{v}'_i=0$$

零动量系

质心运动定理

由质点系动量定理：

$$\int_{t_0}^{t}\sum_i \vec{F}_i\,\mathrm{d}t = \sum_i m_i\,\vec{v}_i - \sum_i m_i\,\vec{v}_{i0} = m\vec{v}_\mathrm{c} - m\vec{v}_{\mathrm{c}0}$$

微分形式： $$\sum_{i=1} \vec{F}_i\,\mathrm{d}t = m\mathrm{d}\vec{v}_\mathrm{c}$$

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_\mathrm{c}}$$

质心运动定理：质心的运动等同于一个质点的运动，这个质点具有质点系的总质量，它受到的外力为质点系所受的所有外力的矢量和。

质心系可能是惯性或者非惯性系，在非惯性系考虑作用在质心上惯性力后，动量守恒（零动量），动能定理和角动量定理均成立。

柯尼希定理和质心系中的动能定理

（1）科尼希定理（质心系总动能的简单表达形式）

$$E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{v}_c+\vec{v}'_i)^2=\frac{1}{2}Mv_\mathrm{c}^2+\vec{v}_c\underbrace{\sum_i m_i\vec{v}'_i}_{=0}+\frac{1}{2}\sum_i m_i v'^2_i$$

$$=\frac{1}{2}Mv_\mathrm{c}^2+E'_\mathrm{k}$$

*（2）质心系中的动能定理

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k}=\sum_i \vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i+\sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{v}_\mathrm{c}+\vec{v}'_i)^2)\right]=\sum_i \vec{F}_i\cdot\mathrm{d}(\vec{r}_\mathrm{c}+\vec{r}'_i)+\sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\,\mathrm{d}(\vec{r}_\mathrm{c}+\vec{r}'_i)$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Mv_\mathrm{c}^2\right)+\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2\right)+\underbrace{\mathrm{d}\left(\sum_i m_i\vec{v}'_i\cdot\vec{v}_\mathrm{c}\right)}_{=0}$$

$$=\sum_i \vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_\mathrm{c}+\sum_i \vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i'+\underbrace{\sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_\mathrm{c}}_{=0}+\sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i'$$

$$\boxed{\therefore\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i v'^2_i\right)=\sum_i \vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}'_i+\sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}'_i}$$

和惯性系中动能定理的形式完全相同（质心系可以为非惯性系）。

运动积分（Constant of Motion）

- $ma=F(t,r,v)$是二阶常微分方程，需要2个初始条件: $r(t_0)$和$r'(t_0)$
- 一般而言，q个自由度的力学系统需要2q个初始条件来确定其解。
- 如果决定力学系统运动的常微分方程组可以通过积分得到若干在运动轨道上不变的量，则称其为运动积分，如能量、动量、角动量等。独立的运动积分最多有2q-1个。
- 运动积分的存在总是与系统的对称性相联系(Noether定理).
- 通过运动积分确定轨道可以大大简化问题，但绝大多数情况下都只能得到少数运动积分，如能量。
- 某些运动积分具有可加性，如能量、动量、角动量.