质点动力学 Dynamics

…奥德修斯归来，被时间和空间充满。

——曼德尔施塔姆

The Force

一个与运动密切相关的物理抽象；

一个在概念上逐渐被取代的描述方式；

一个在日常世界中便捷清晰的物理图像。

力与运动

亚里士多德：力是物体运动的原因
伽利略：力是改变物体运动的原因

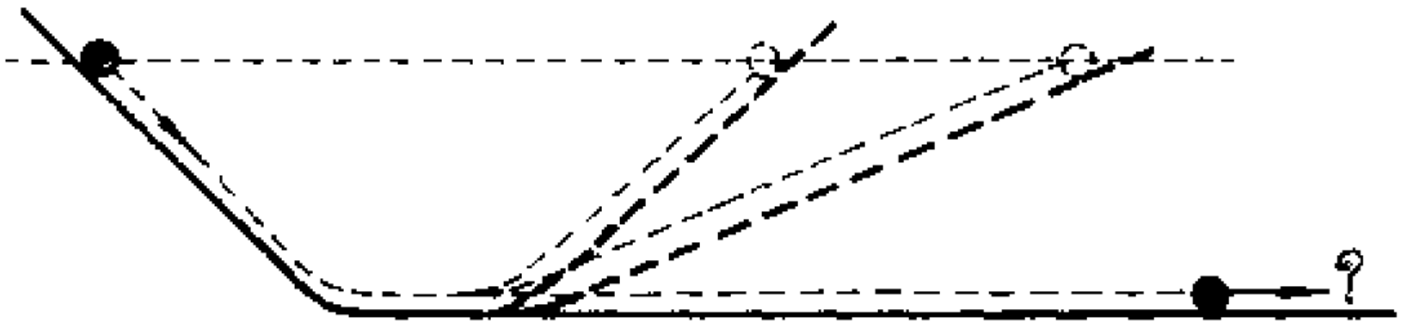


图 2 — 1 伽利略斜面实验

伽利略：力不是维持运动的原因。

笛卡尔：无外力，等速直线运动

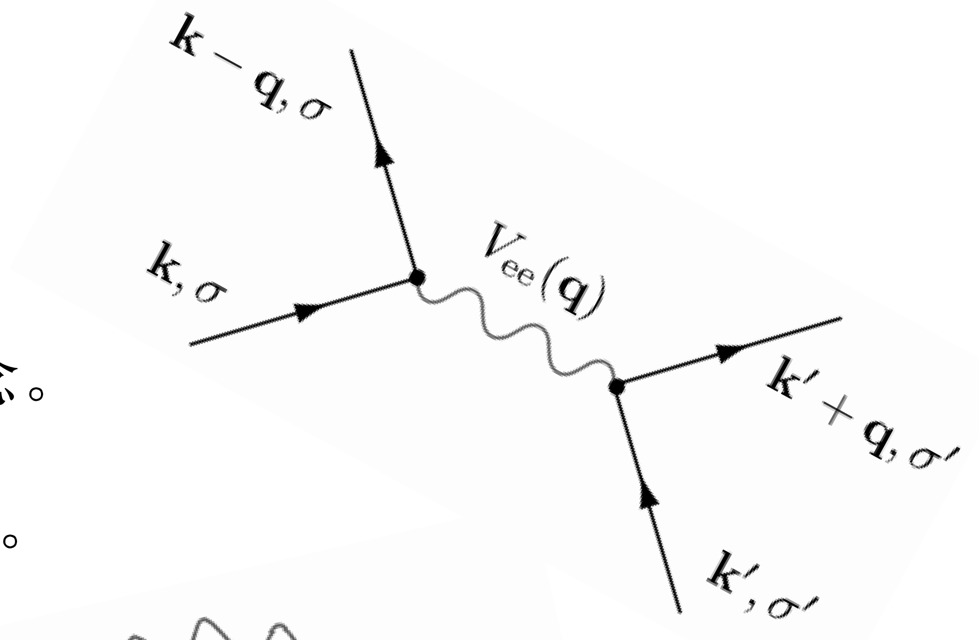
牛顿：无外力，匀速直线运动或静止；直到有外力改变这个状态。

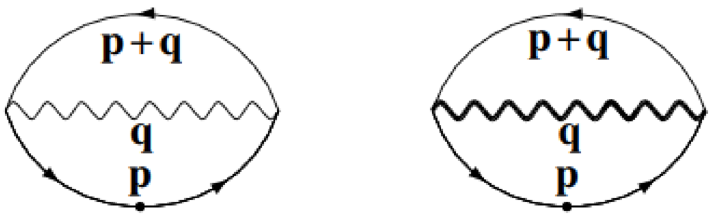
生活中的例子？

力与相互作用

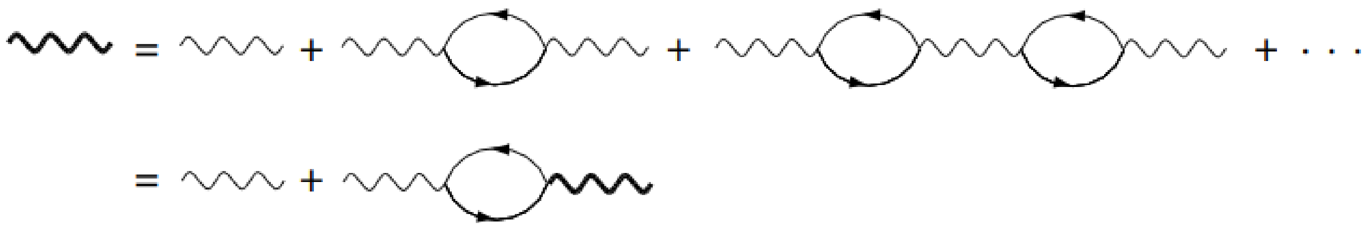
在现代物理中，力逐渐变成了一个冗余的概念。

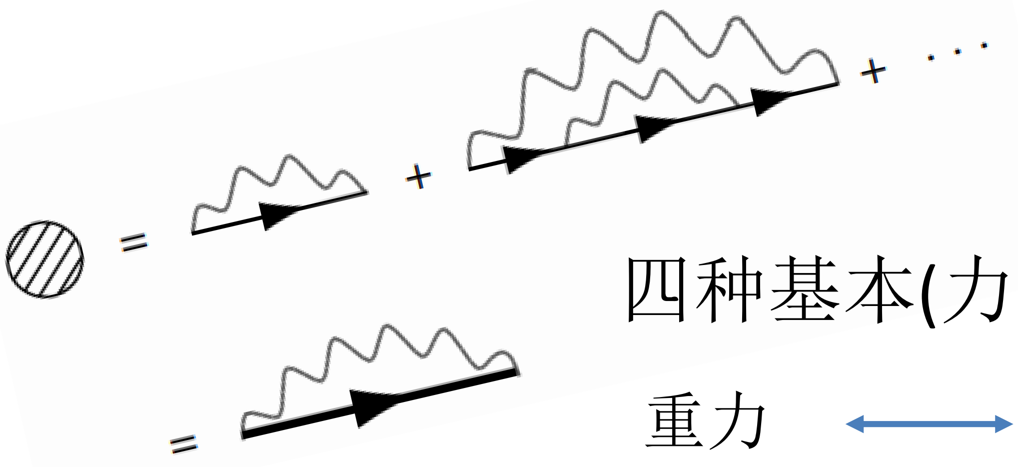
逐渐被能量，场，交换玻色子(费曼图)所取代。





(a) (b)

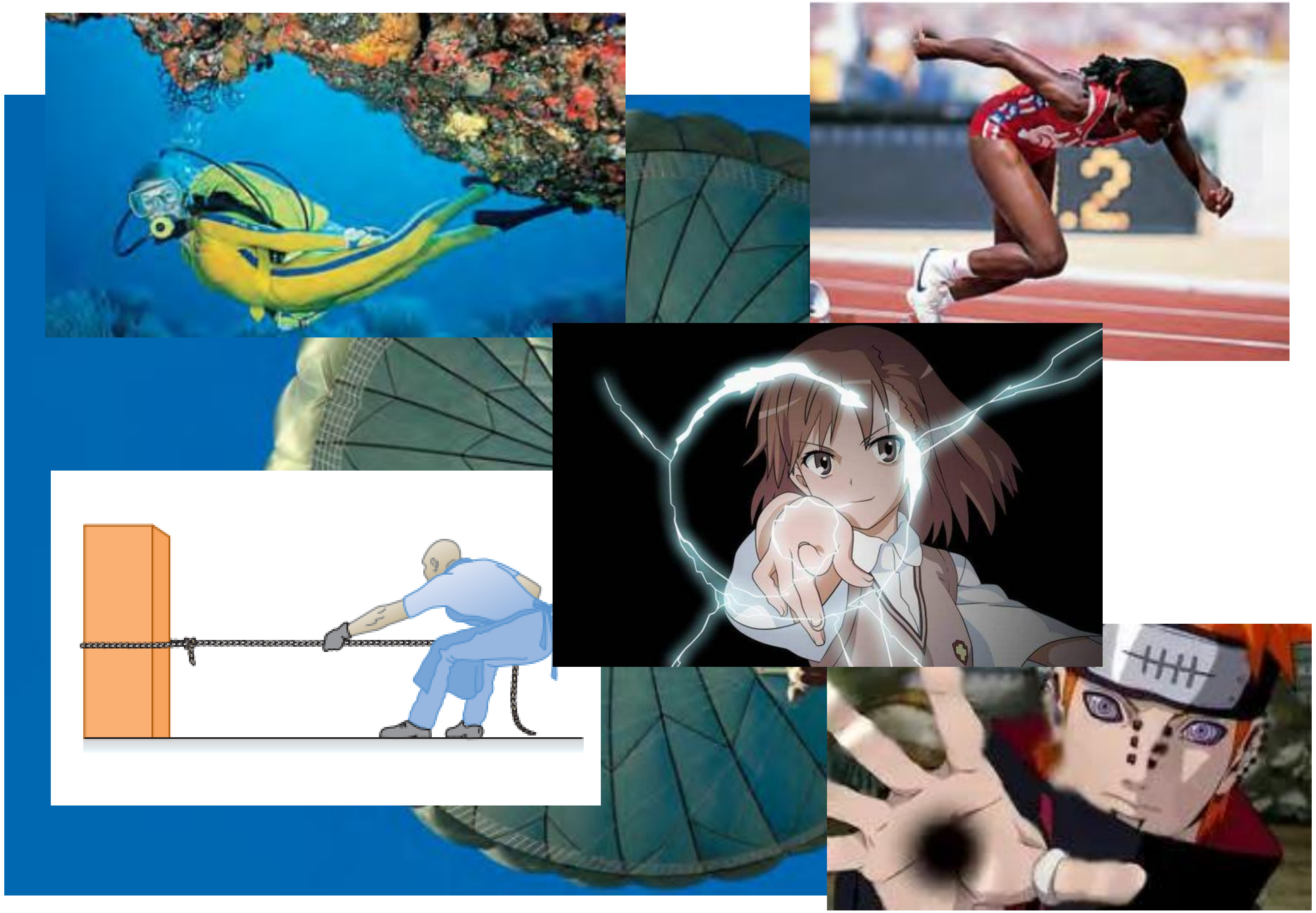


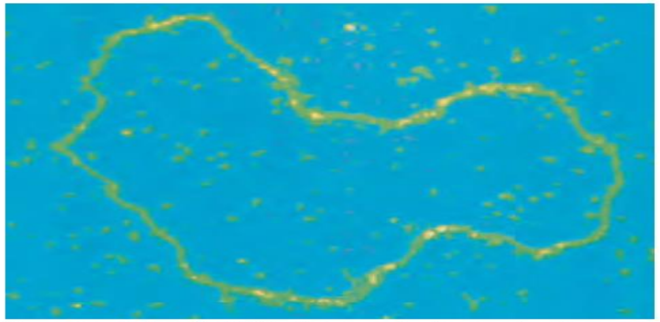


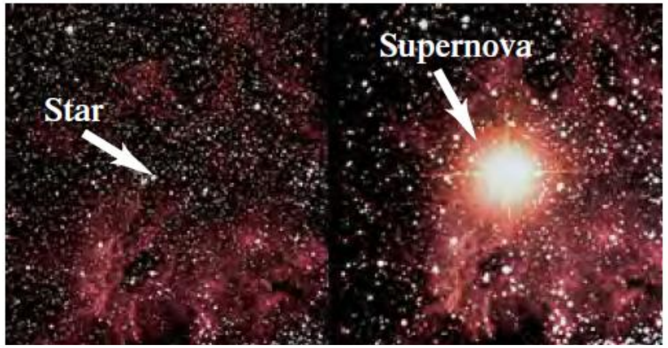
四种基本(力)相互作用

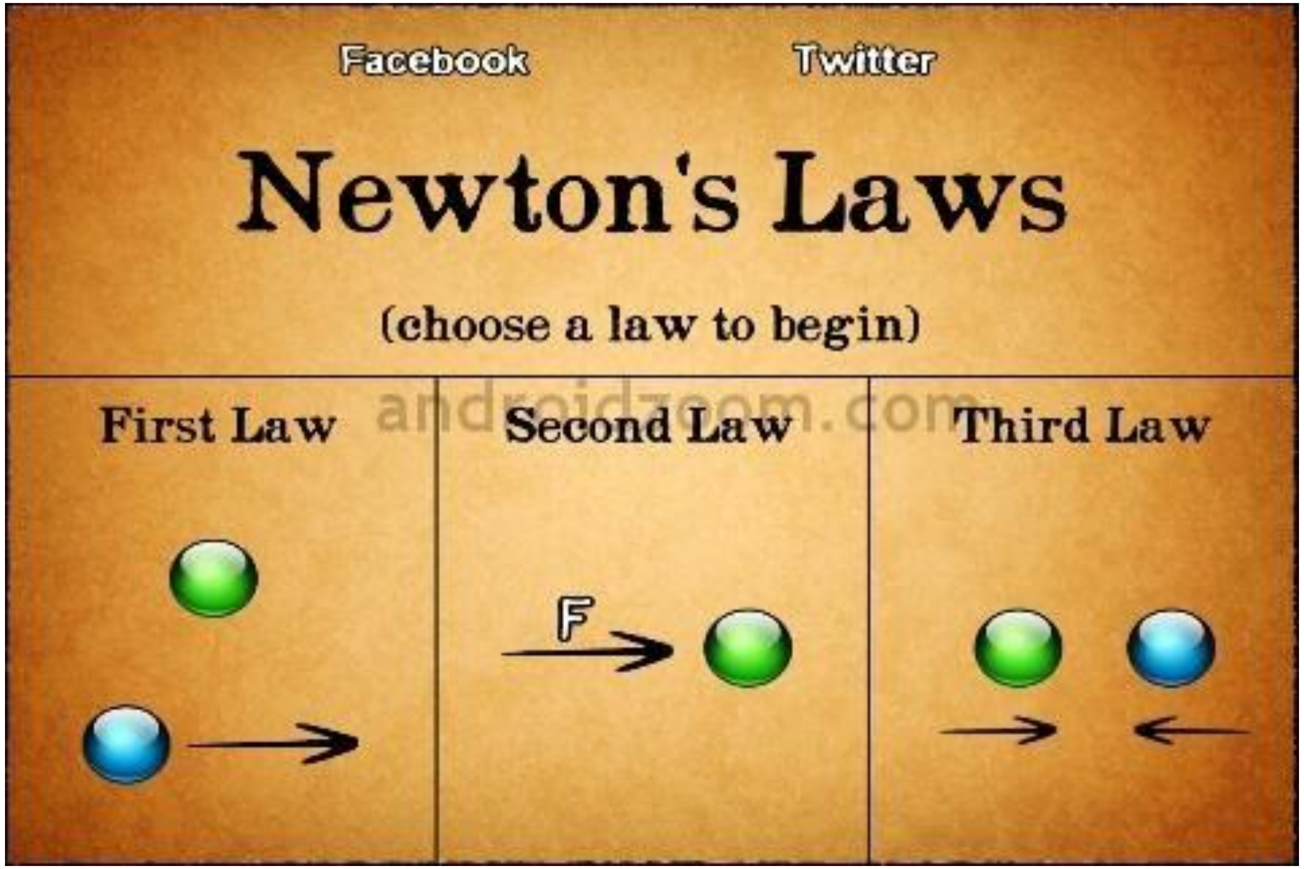
重力	Graviton
电磁力	Photon
弱力	W&Z boson
强力	Gluon

生活中常见的力









1. Every body persists in its state of being at rest or of moving uniformly straight forward, except insofar as it is compelled to change its state by force impressed.

2. The alteration of motion is ever proportional to the motive force impress'd; and is made in the direction of the right line in which that force is impress'd.

3. To every action there is always opposed an equal reaction: or the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.

牛顿第一定律（惯性定律）

任何物体如果没有力的作用，都将保持静止或作匀速直线运动的状态。

(1) 定义了惯性参考系 ← 在牛顿第一定律适用的参考系才是惯性参考系

物体静止或匀速直线运动，相对哪个参照系? ——惯性参考系

(2) 定义了物体的惯性和力的概念

•物体保持运动状态的特性——惯性

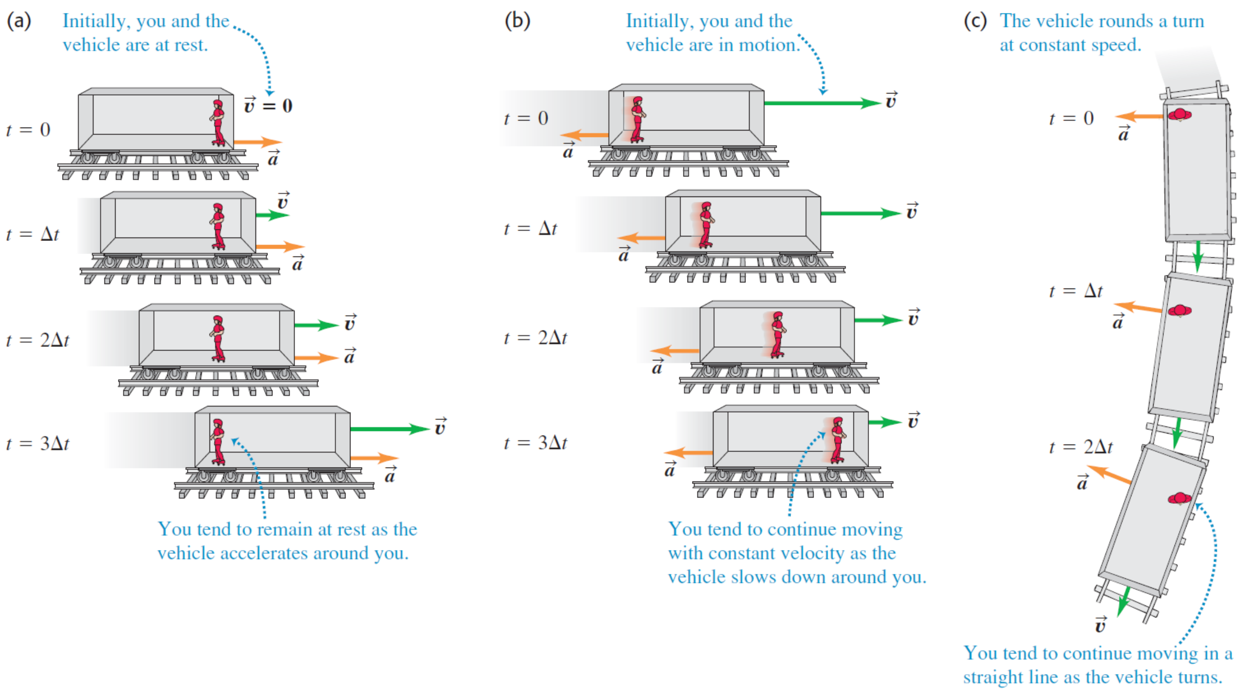
•改变物体运动状态的原因——力（相互作用）

现代版本的描述：

自由粒子永远保持静止或匀速直线运动的状态。

惯性参考系 inertial frame of reference

惯性是时空的内禀性质，来源于空间的平移对称性（均匀性）
最常见的惯性参考系：地球表面（近似）
常见的非惯性参考系：加速减速的车厢，过弯道的火车，启动停止的电梯等



相对于惯性参考系静止或者匀速直线运动的参考系，均为惯性参考系。

惯性定律中描述的静止和匀速直线运动，并没有差别。

牛顿第二定律

如何定量描述力的作用？

施加于物体的外力等于此物体的质量与加速度的乘积

第二定律同时定义力的量度和物体（惯性）质量

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{F}$，N；m，kg；a，m/s^2

长度，质量，时间：操作定义
力：根据牛顿第二定律 衍生定义

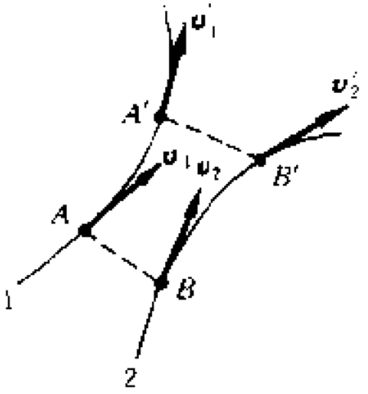
惯性质量 m

惯性(inertia)：物体保持运动状态的特性

如何定量描述惯性？

惯性质量的操作定义：两个相互作用的物体的加速度的负比值）

(马赫，1867，《关于质量的定义》)



实验上我们发现

(1) 在任意给定的时间间隔内，这两个速度的变化 $\Delta \boldsymbol{v}_1$ 和 $\Delta \boldsymbol{v}_2$ 方向相反；

(2) 在 $\Delta t \to 0$ 的极限下，$\Delta \boldsymbol{v}_1 \to \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1$ 和 $\Delta \boldsymbol{v}_2 \to \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2$ 排在两质点的瞬时联线上。

(3) 不论时间间隔 Δt 如何，速度的变化 $\Delta \boldsymbol{v}_1$ 和 $\Delta \boldsymbol{v}_2$ 的大小之比总是一样的。因此，我们可以写：

$$\Delta \boldsymbol{v}_1 = -K\Delta \boldsymbol{v}_2, \quad (2.1)$$

式中 K 对于每一对质点是相同的，而与它们怎样运动无关。

(4) 当我们分别用质点 2 和 3 与质点 1 进行实验时，(2.1) 式中的常数 K 分别等于 K_{12} 和 K_{13}，若用质点 3 和质点 2 直接做实验时，则有

$$K_{23} = K_{13}/K_{12}. \quad (2.2)$$

关于惯性质量定义的理想实验

惯性质量 和 引力质量 的差别？

力 $\vec{F}$

它是矢量，有大小方向，有原点，可以加

质点所受的合力为所有作用在质点上的力的矢量和： $\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i$

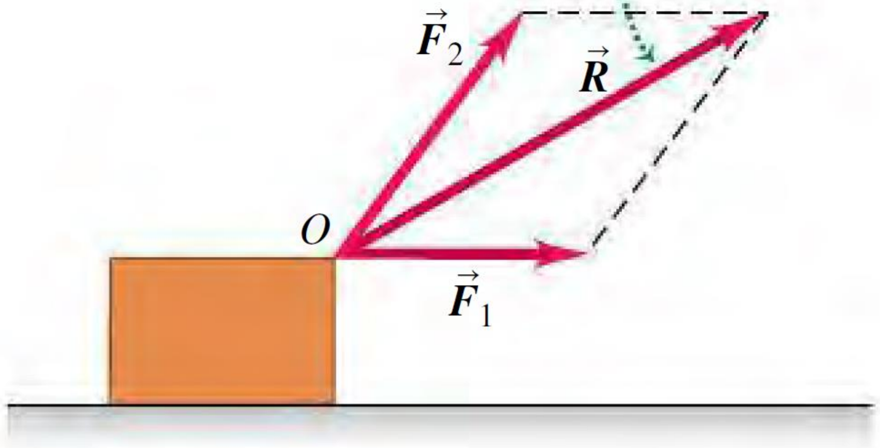
在合力作用下，加速度方向与合力方向相同 $\vec{a}=\frac{\sum_i \vec{F}_i}{m}$

分量形式：
$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k} \\ &= m\vec{a} \\ &= ma_x\vec{i}+ma_y\vec{j}+ma_z\vec{k}\end{aligned}$$

质点的加速度与其所受的力同时出现或消失

（但力的传递需要时间）

Two forces $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ acting on a body at point O have the same effect as a single force $\vec{R}$ equal to their vector sum.



牛顿第二定律：动量定理

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

引入动量(momentum) $\vec{p}=m\vec{v}$,

因此有$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$

物体所受外力等于其动量对时间的变化率

动量更容易推广，更“基本”

- 在引入相对论之后，物体的质量m将不再是一个恒定的值，而是随速度变化。$m=m_0/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$，其中，$m_0$是物体静止时的质量。$F=m\frac{dv}{dt}$不再成立。然而$F=dp/dt$依然成立。
- 在引入量子力学之后，物体的速度和$F=dp/dt$将不具有确切的定义。但是动量仍然存在。

牛顿第三定律（作用力与反作用力）

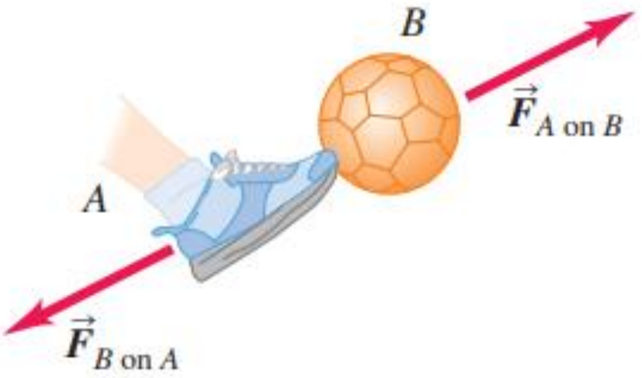
作用力与反作用力大小相等、方向相反，作用在不同物体上。

牛顿第三定律定义了相互作用的性质！

除作用在不同物体上以外
作用力与反作用力本质相同

注意作用力和反作用力与平衡力的差别。

在牛顿力学的框架下，作用力与反作用力同时出现或消失

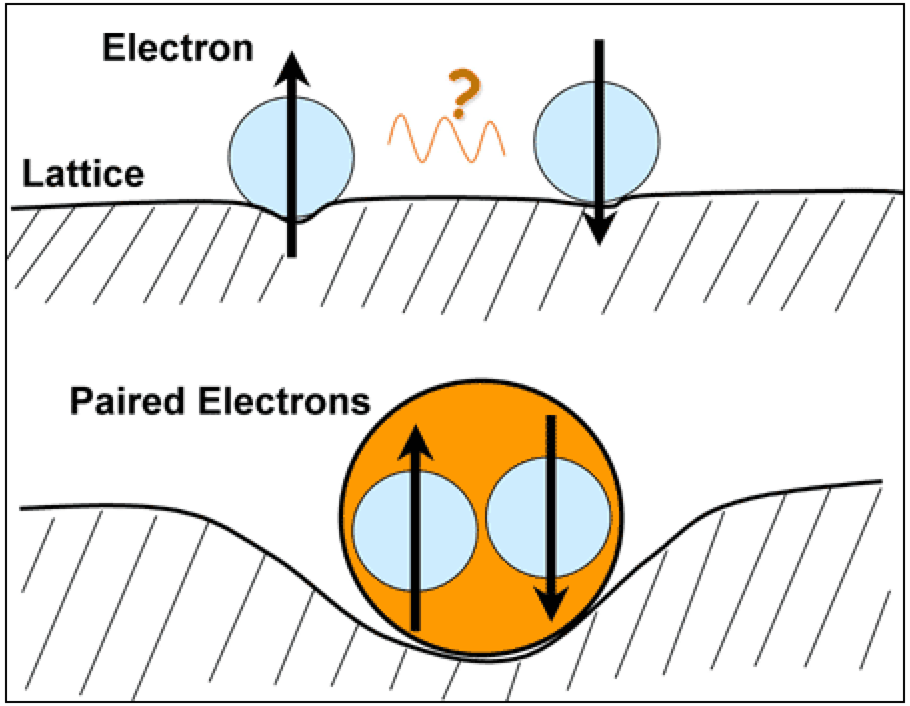


延时发生的作用力

考虑两个电子，它们之间是如何发生相互作用的？

把两个小球放到介质上，它们可以如何发生相互作用的？

把电子放到晶格上之后，会如何？



牛顿定律的意义

动量守恒定律：对于没有外力作用的系统，其动量守恒。（如果动量不守恒，则根据动量的改变速度来计算外力）。

动量守恒来源于空间平移不变性。牛顿三大定律也是空间平移不变性的直接结果。

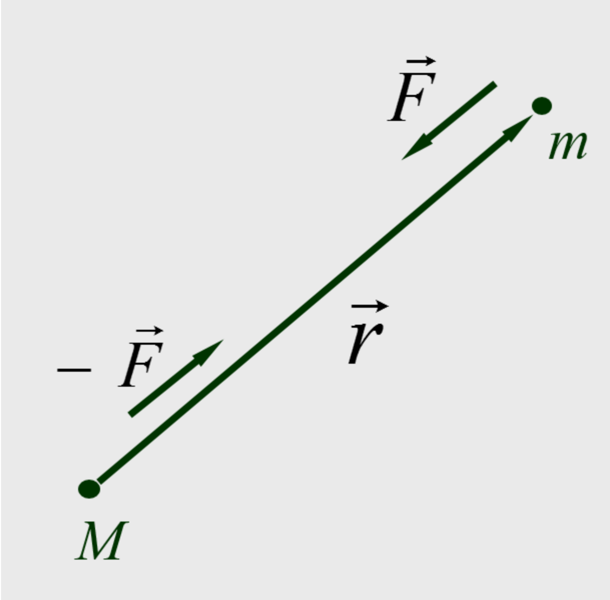
A continuous symmetry entails a classically conserved current.

诺特：任意一个连续对称性必定对应一个经典系统的守恒律

当空间不再均匀（平移对称性被破缺），牛顿三大定律不再适用。

自然界中常见的力的形式和性质

引力 $$F = G\frac{mM}{r^2}$$



引力常数 G，引力质量 m，M

自然界中常见的力的形式和性质

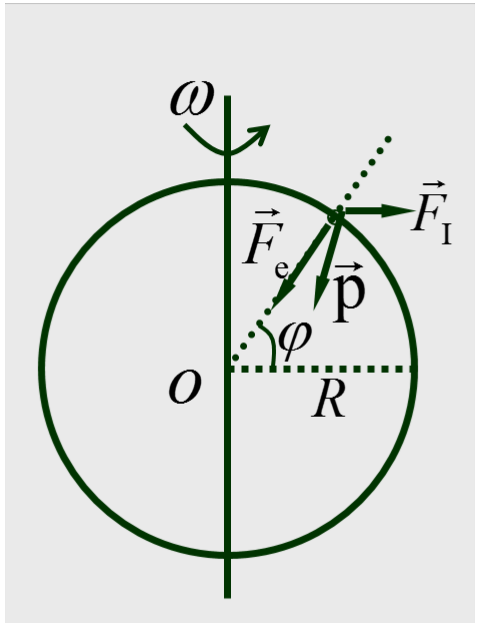
重力

$$\vec{p} = \vec{F}_{\mathrm{e}} + \vec{F}_{\mathrm{I}}$$

$$F_{\mathrm{e}} = G\frac{mM}{R^2} \qquad F_{\mathrm{I}} = m\omega^2 r$$

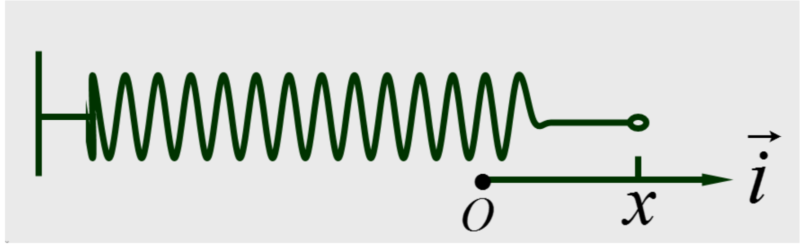
$$r = R\cos\phi$$

$$p = F_{\mathrm{e}}(1 - 0.0035\cos^2\phi)$$



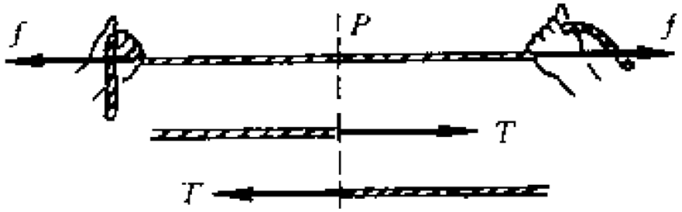
自然界中常见的力的形式和性质

弹性力　大小正比于形变。方向与形变方向相反，指向平衡位置，又称为弹性回复力。



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

k：劲度系数，　$x\vec{i}$：端点的位移，　O为平衡位置。

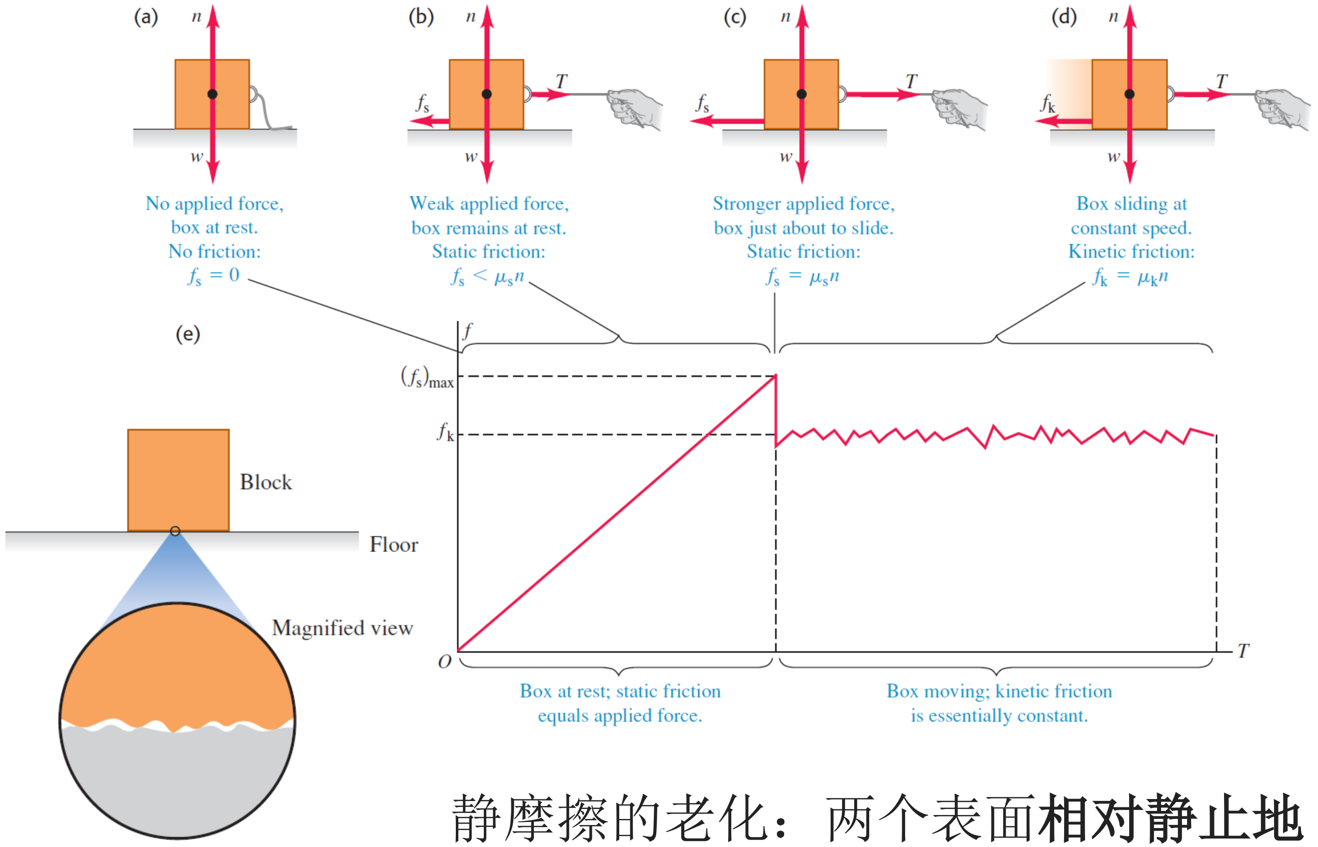


绳中的张力

绳中的张力处处一致吗？

自然界中常见的力的形式和性质

摩擦力



静摩擦的老化：两个表面**相对静止地接触时间越长，启动摩擦力就越大**。

正比于样品接触面的压力（弹性力）。
绝大部分材料之间的摩擦系数小于1。
摩擦系数与材料表面的状态非常有关。

F=μN是个粗糙的半经验公式

摩擦现象的机理是复杂的，是必须在分子尺度内才能加以说明的。

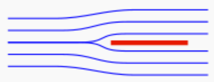
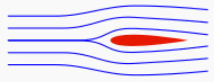
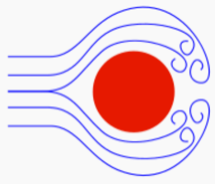
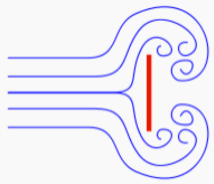
由于分子力的电磁本性，摩擦力说到底也是由电磁相互作用引起的

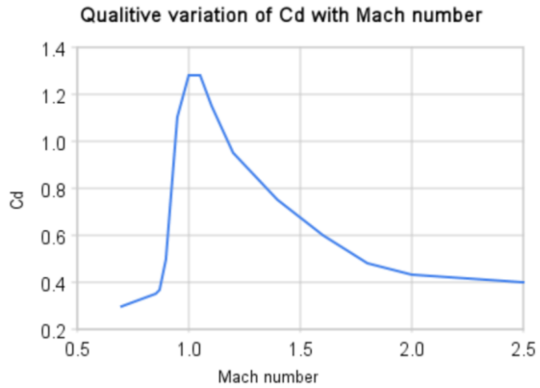
自然界中常见的力的形式和性质

流体阻力

物体在流体中运动时，会受到流体的阻力。

- 物体运动速度小时： $\vec{f}=-b\vec{v}$ 常数与流体及物体的性质有关
- 物体运动速度大时： $|\vec{f}|=-cv^2$ $\Longrightarrow$ 湍流（旋涡）
- 物体运动速度更大时： $f\propto v^3$

形状及流场	形状阻力	摩擦阻力
	0%	100%
	~10%	~90%
	~90%	~10%
	100%	0%



小结

动力学，描述运动的“原因”，即受力与运动之间的相互关系。

- Newton’s laws of motion: 牛顿运动定律
- Force： 力
- Mass： 质量
- Inertial frame of reference： 惯性参考系

牛顿定律应用（如何解题）

主要指牛顿第二定律的应用

关键步骤

（1）选取研究对象

（2）对研究对象隔离，分析受力情况（freebody diagram）

（3）选择适当坐标系，列出相应方程（微分方程）

（4）解方程，并对结果进行分析和讨论

例：雨滴下落过程中受到空气粘滞力作用时的运动规律

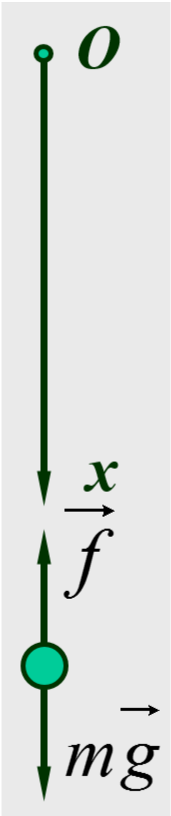
（1）选取研究对象　　　水滴

（2）对研究对象隔离，分析受力情况

（3）选择适当坐标系，列出相应方程

动力学方程 $\begin{cases} m\vec{g}+\vec{f}=m\vec{a} \\ \vec{f}=-k\vec{v} \end{cases} \longrightarrow mg-kv=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

初始条件　$v|_{t=0}=0 \quad x|_{t=0}=0$



例：雨滴下落过程中受到空气粘滞力作用时的运动规律

（4）解方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{k}{m}v}=\mathrm{d}t \Longrightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{k}{m}v}=\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow -\frac{m}{k}\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)\Big|_{v_0}^{v}=t$$

$$\Longrightarrow -\frac{m}{k}\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)+\frac{m}{k}\ln\left(g-\frac{k}{m}v_0\right)=t$$

$$\xRightarrow{v_0=0} v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

例：雨滴下落过程中受到空气粘滞力作用时的运动规律

$$\Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) dt$$

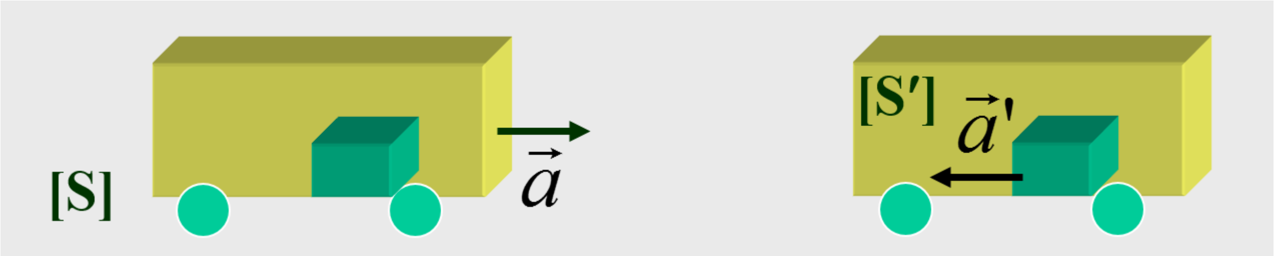
$$\Rightarrow \quad x - x_0 = \frac{mg}{k}\left[t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right]$$

因为x_0=0, 所以 $x = \frac{mg}{k}\left[t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right]$

非惯性系

牛顿定律仅在惯性系中成立，反过来说，对于牛顿定律来说，所有的惯性系都是等价的（伽利略相对性原理）。

考虑如下两个参考系S（地面）和S′（相对于S加速运动的车厢）：



很显然在S参考系中，滑块的运动符合牛顿定律。

而在S′参考系中牛顿定律不成立。

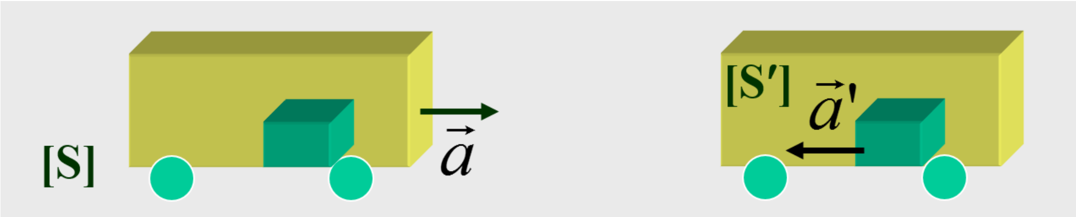
惯性系通常是一种近似

实际上，没有严格意义上的惯性系存在，惯性系只是参考系的一个理想物理模型。

实际工作中常常根据具体情况选用一些近似惯性系。比如在研究地面上物体的运动时，选用地面参考系就是一个很好的近似。

地面参考系	地球自转加速度 $a \sim 0.034\ \mathrm{m/s^2}$
地心参考系	地球公转加速度 $a \sim 0.006\ \mathrm{m/s^2}$
太阳参考系	太阳绕银河系中心加速度 $a \sim 3 \times 10^{-10}\ \mathrm{m/s^2}$

平动加速参考系中的惯性力



设 S 为惯性系，S’ 为非惯性系

S’ 相对于S 加速度为：$$\vec{a}_0 = \frac{\mathrm{d}\,\vec{u}}{\mathrm{d}t}$$

两个平动参考系之间，加速度变换 $$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

若质点 m 在 S系中满足牛顿第二定律：$$\vec{F} = m\vec{a}$$

考虑到力与参考系无关 ⟹ $$\vec{F}' \equiv \vec{F} = m\vec{a}_0 + m\,\vec{a}\,'$$

则在 S’ 系中：$\vec{F}' \neq m\vec{a}'$ ⟹ 牛顿第二定律在非惯性系不成立！

平动加速参考系中的惯性力

但是，若在非惯性系引入虚拟力（惯性力）：

$$\vec{F}_{\mathrm{I}} = -m\vec{a}_0$$

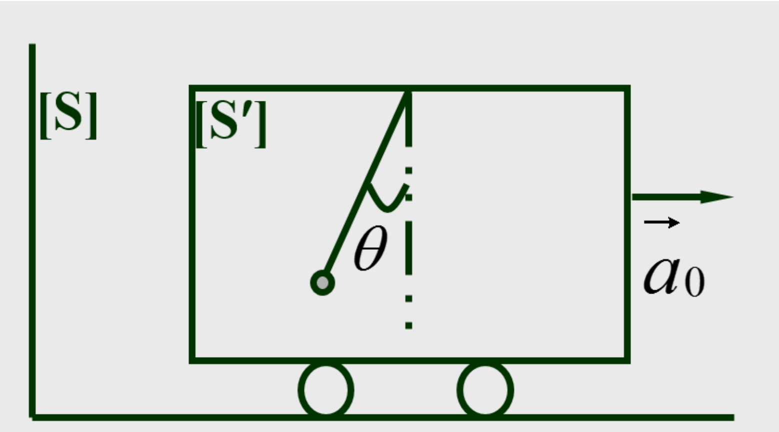
在非惯性系 S’ 系中：$\vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{I}} = m\vec{a}'$

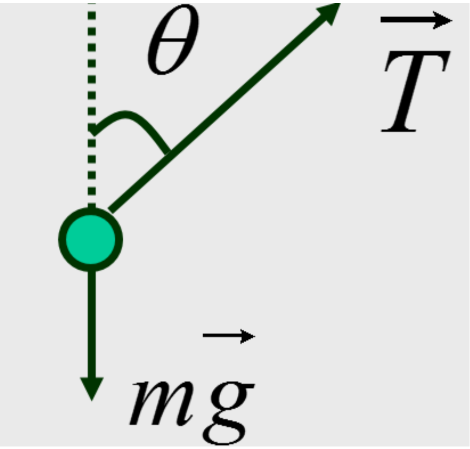
牛顿第二定律在非惯性系形式上成立

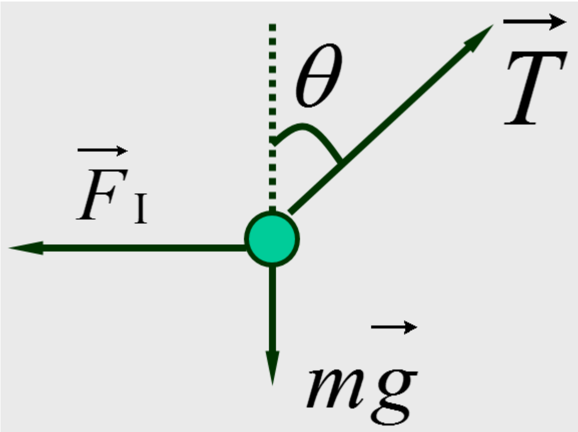
- 惯性力不是真正作用在物体上的力！
- 惯性力无施力者，也无反作用力。

本质原因：非惯性系破坏了空间平移不变性

在惯性和非惯性系中分析同一问题的例子







- 在 S 系中，小球受力如图

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_0$$

小球以$\vec{a}_0$加速运动！

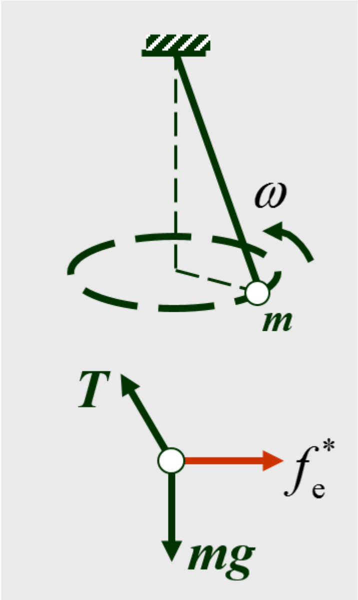
- 在 S′系中，小球受力如图

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_{\mathrm{I}} = 0 \quad \vec{F}_{\mathrm{I}} = -m\vec{a}_0$$

平衡位置：小球静止！ $\tan\theta = \dfrac{a_0}{g}$

匀速转动参照系中的惯性力

惯性“离心力”



在转动系中m静止，为保持牛顿定律形式不变

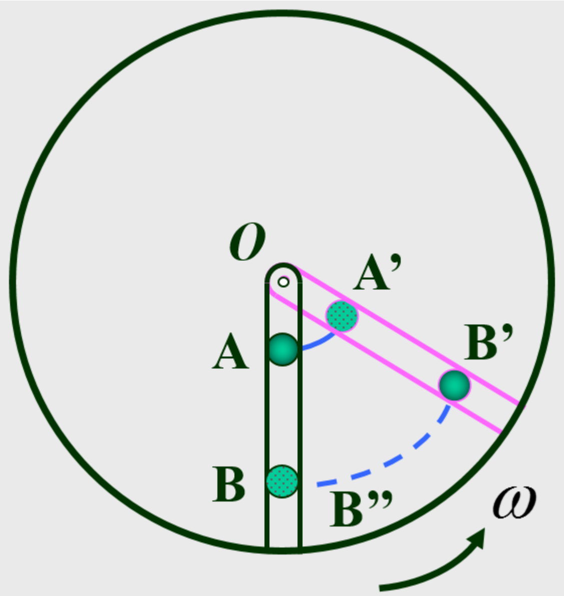
$$\vec{F}_n + \vec{f}_e^* = 0 \qquad F_n = mR\omega^2$$

$$f_e^* = -mR\omega^2$$

f_e^* 称为惯性离心力

匀速转动参照系中的惯性力

科里奥利力



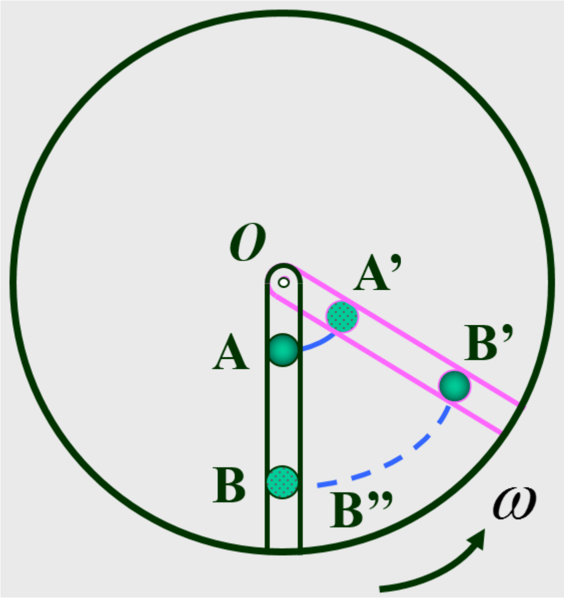
匀速转动盘，小球沿径向光滑槽以v’运动

S系：经Δt，由A→B’，随$r\uparrow$，$r\omega\uparrow$，法向速度增加。
必有垂直于径向的加速度
原因：受到槽壁的作用力，$\vec{f}=m\vec{a}$

S’系：匀速直线运动，无加速度，但仍受槽壁作用
必有一惯性力存在，使 $\vec{f}+\vec{f}_c^*=0$

匀速转动参照系中的惯性力

从位移的角度来理解



位移BB’可以看作是A点的速度和加速度导致的
也可以由位移的几何关系得到

$$S_{\mathrm{BB}'} = \omega r_{OA}\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 = r_{OB}\Delta\phi$$

$\Delta\phi = \omega\Delta t$　$r_{OB} = r_{OA} + v'\Delta t$　得到$\frac{1}{2}a\Delta t^2 = v'\omega\Delta t^2$

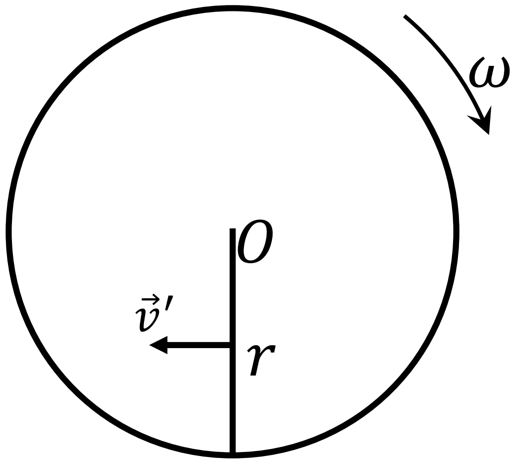
$$a = 2v'\omega$$

$f_{\mathrm{c}}^* = 2mv'\omega$　考虑到方向　$\vec{f}_{\mathrm{c}}^* = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$

这里我们定义了角速度的方向（右手定则）

匀速转动参照系中的惯性力

在上一个例子中速度是沿着径向的方向
如果速度$\vec{v}'$是沿着角向呢？

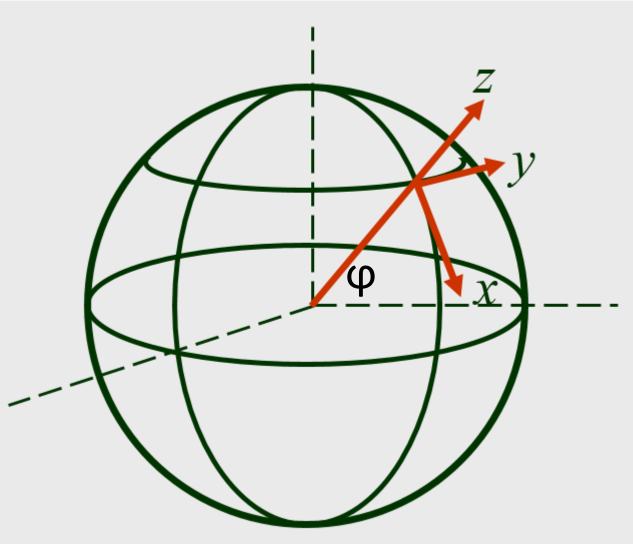


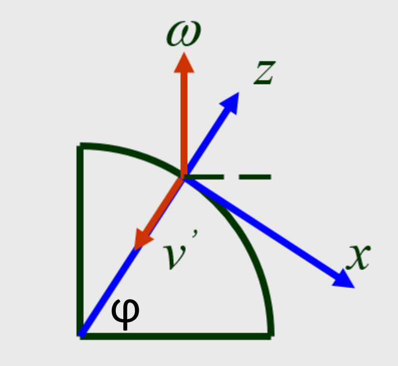
相似的，我们仍然可以得到

$$\vec{f}_{\mathrm{c}}^{*} = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

科里奥利力描述了在匀速转动参考系中具有相对参考系速度的物体受的惯性力
它和惯性离心力共同作用，成为匀速转动参考系中的两个非惯性力

*落体偏东问题





质点从高h处下落，求落地点的偏离

惯性力：$\vec{f}_c^* = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}' = 2m\omega v'\cos\phi\,\vec{j}$

v'：落体速度

$$f_c^* = 2m\omega g t\cos\phi\,\vec{j}$$

得到 $2m\omega g t\cos\phi = m\dfrac{dv_y}{dt}$

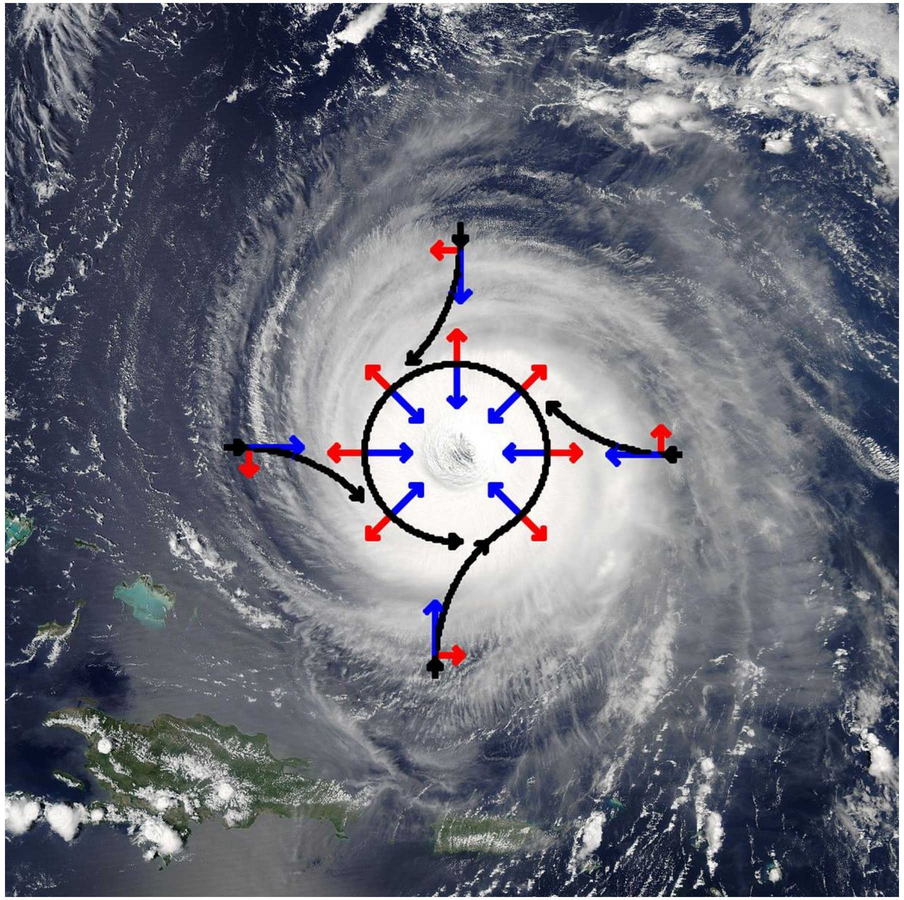
$v_y = \omega g t^2\cos\phi + c$　　初始条件$t=0, v=0$, 得到 $c=0$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega g t^2\cos\phi$　　积分得$y = \dfrac{1}{3}\omega g t^3\cos\phi$

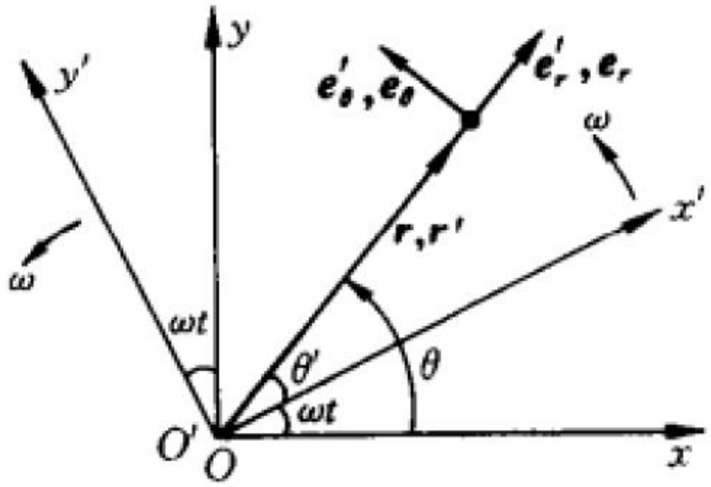
落地时间：$z = h - \dfrac{1}{2}gt^2$，$t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$　　$y = \dfrac{1}{2}\omega g\sqrt{\dfrac{8h^3}{g}}\cos\phi$

科里奥利力

Call of Duty, Modern Warfare



*惯性离心力和科里奥利力一般性导出



惯性系: S
非惯性系：S’ 以角速度ω匀速绕S转动

坐标之间的联系

$$r = r', \qquad \theta = \theta' + \omega t,$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt}, \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r'}{dt^2},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta'}{dt} + \omega, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta'}{dt^2},$$

单位矢量之间的联系

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}'_r, \qquad \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}'_\theta.$$

建立S系描述的速度和加速度与S’系中的速度和加速度之间的联系

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

S’系

$$v'_r = dr'/dt, \qquad v'_\theta = r'\frac{d\theta'}{dt},$$

$$a'_r = \frac{d^2r'}{dt^2} - r'\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)^2, \qquad a'_\theta = r'\frac{d^2\theta'}{dt^2} + 2\frac{dr'}{dt}\frac{d\theta'}{dt}.$$

质点在 S 系的径向加速度可展开成

$$\boldsymbol{a}_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\boldsymbol{e}_r = \left[\frac{d^2r'}{dt^2} - r'\left(\frac{d\theta'}{dt} + \omega\right)^2\right]\boldsymbol{e}'_r = \boldsymbol{a}'_r - 2\boldsymbol{v}'_\theta \times \boldsymbol{\omega} - \omega^2\boldsymbol{r}'$$

*惯性离心力和科里奥利力一般性导出

质点在 S 系的角向加速度可展开成

$$\boldsymbol{a}_\theta = \left(r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{e}_\theta = \left[r'\frac{\mathrm{d}^2\theta'}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t} + \omega\right)\right]\boldsymbol{e}'_\theta = \boldsymbol{a}'_\theta - 2\boldsymbol{v}'_r \times \boldsymbol{\omega},$$

联合后，有

$$m(\boldsymbol{a}'_r + \boldsymbol{a}'_\theta) = m(\boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_\theta) + m\omega^2\boldsymbol{r}' + 2m(\boldsymbol{v}'_r + \boldsymbol{v}'_\theta) \times \boldsymbol{\omega}.$$

S 系中测得质点受真实力

$$\boldsymbol{F} = m(\boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_\theta) = m\boldsymbol{a},$$

S' 系中便需引入两个分别称为惯性离心力和科里奥利力的虚拟力

$$\boldsymbol{F}_c = m\omega^2\boldsymbol{r}', \qquad \boldsymbol{F}_{\mathrm{Cor}} = 2m(\boldsymbol{v}'_r + \boldsymbol{v}'_\theta) \times \boldsymbol{\omega} = 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega},$$