

质点运动学

kinematics

~~什么是运动？如何描述运动？~~

基本的概念：描述运动

文字描述：

他开始向墙走去.....准备直接冲进票亭.....向前猛冲.....墙越来越近，仅一步之遥...他准备撞了上去.....什么都没有发生.....继续跑着，他睁开了眼睛。

——《哈利波特》

数学描述：

时空中坐标的(连续)变化： (\vec{r}, t) ； 坐标原点的选取：参考系

运动的描述：坐标作为时间的函数 $x = f(t)$ ； 高维空间， 矢量： $\vec{r} = \vec{f}(t)$

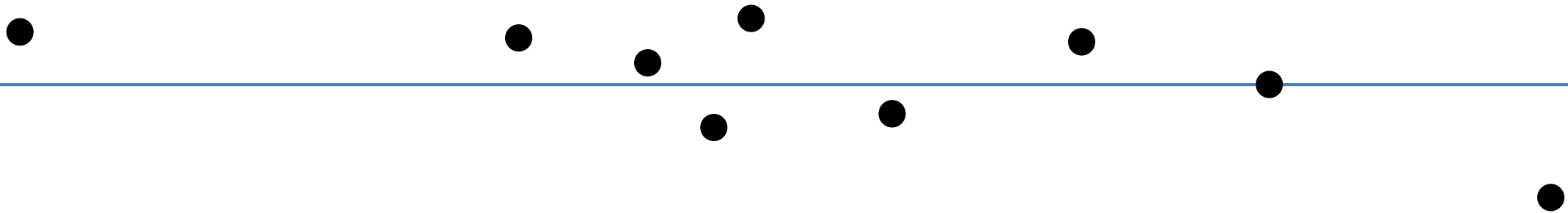
与力学性质相关的主要衍生量：速度， 加速度

数学描述更精确， 易推广， 但更抽象

基本的概念：描述运动

两个例子：

A 飞弹以匀速 v_1 在距地面高 L 的高度飞行，经过拦截导弹正上方时，导弹以速度 v 出发拦截，每时每刻拦截导弹的运动方向都指向飞弹。
问：导弹的运动轨迹，何时能拦截到飞弹

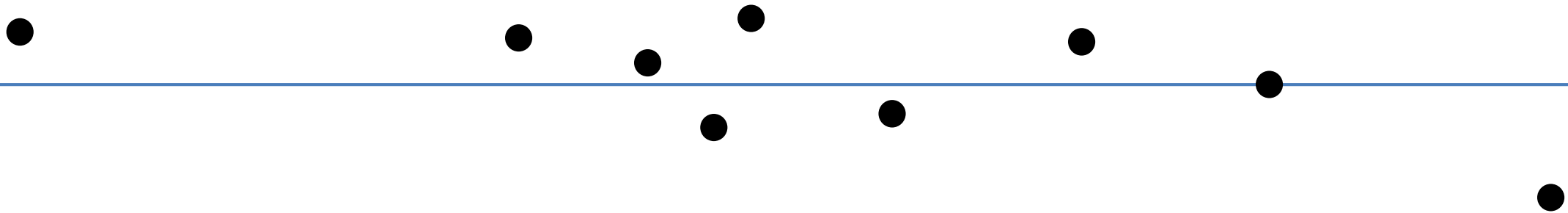


B 在平面上撒一堆点，任意三个点都不共线。取一根无穷长的棍子置于其中某个点A上，让长棍以固定的速度 ω 开始以A为轴旋转。在旋转过程中，长棍碰到任意一个点，都会以这个点作为新的转轴开始旋转。
问：如何选取初始点A才能让长棍遍历所有的点。

基本的概念：描述运动

两个例子：

A （飞弹的轨迹）： 数学描述可以普适地处理各类复杂的运动
是一个包罗万象的框架



B （长棍的旋转）： 普适的框架下给出的公式不一定真的能解出来，物理的图像往往能帮我们洞察问题的核心

基本的概念：一维世界



时空中坐标非常简单， (x, t)

但我们需要一个原点， $(0, t)$

参考系 (frame of reference)：用来描述物体运动而选作参考的物体

- 运动的**相对性**决定描述物体运动必须选取参考系
- 在运动学中，参考系可任选，但以描述方便为原则
- 不同参考系中，对物体运动的描述**不同**

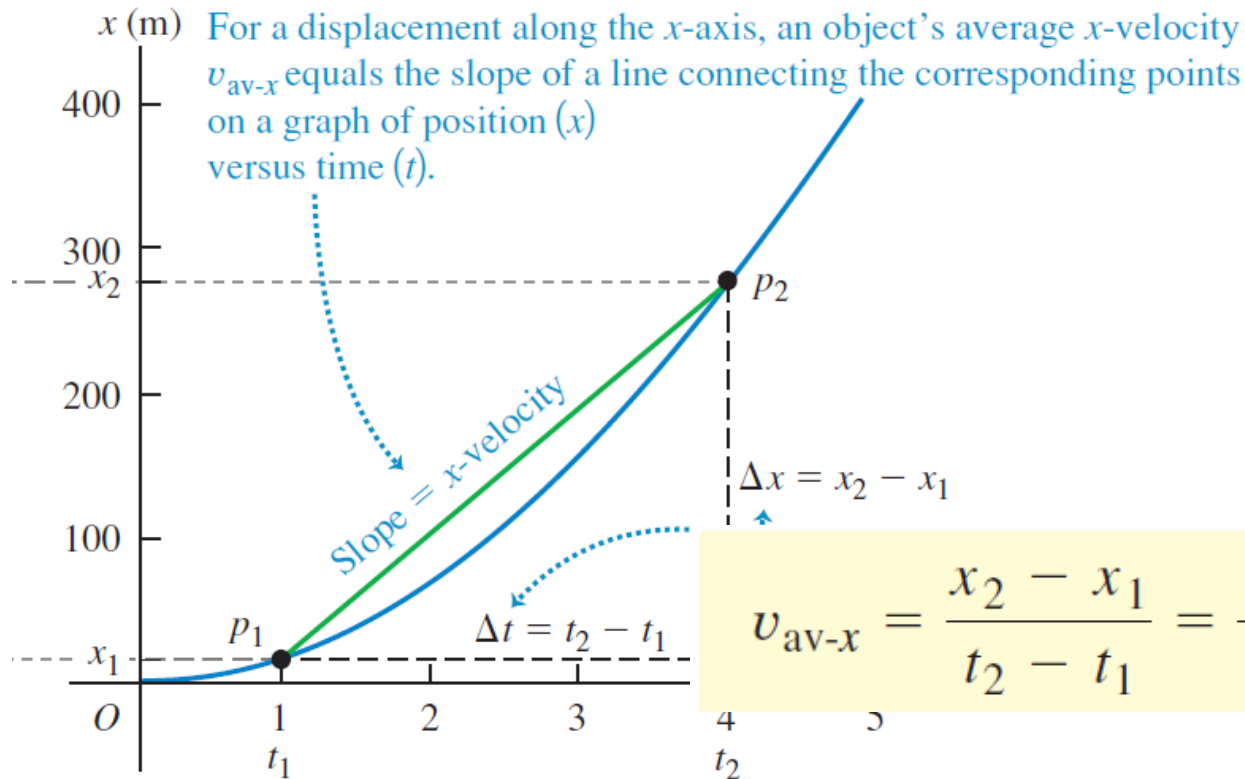
- 参考系本身可以是运动的
 - 惯性参考系
 - 非惯性参考系

我们暂时只考虑惯性系

基本的概念：一维世界



时空中坐标非常简单， (x, t)



运动的描述：坐标作为时间的函数 $x = f(t)$

从起点到终点
经历的位移 $\Delta x = x_2 - x_1$ ；经历的时间 $\Delta t = t_2 - t_1$

平均速度

$$v_{av-x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{average } x\text{-velocity, straight-line motion})$$

基本的概念：一维世界

平均速度够不够用？

新的需求

描述某一时刻的速度？如何比较不同时刻，比如 t_2 和 t_1 的速度？

新的抽象

瞬时速度

基本的概念：瞬时速度

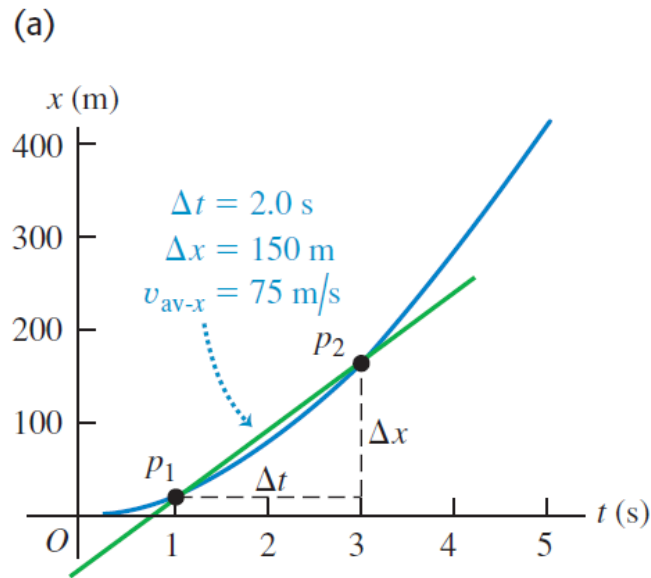
为了能够刻画一个物体在任意时刻的运动快慢，我们将测量平均速度的时间不停缩短，直到趋向于一个无穷小的时间间隔，这个时候我们就能够得到在一个特定时刻物体的平均速度，称为瞬时速度。

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (\text{instantaneous } x\text{-velocity, straight-line motion})$$

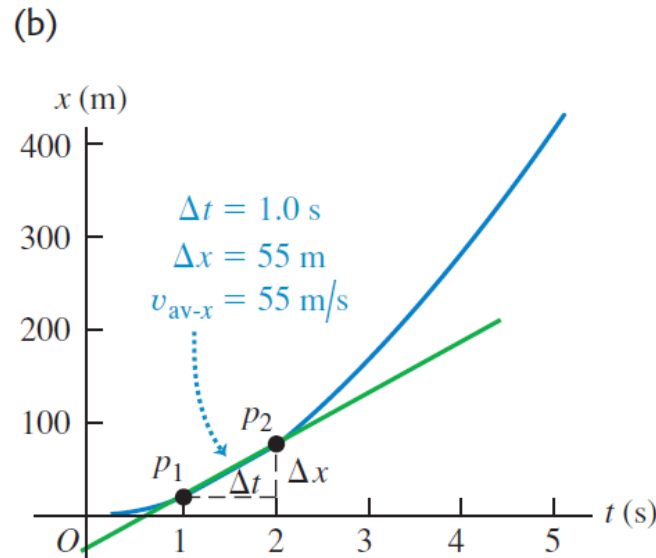
数学记号 dx/dt 称做 $x(t)$ 对于 t 这个变量的微分

基本的概念：瞬时速度

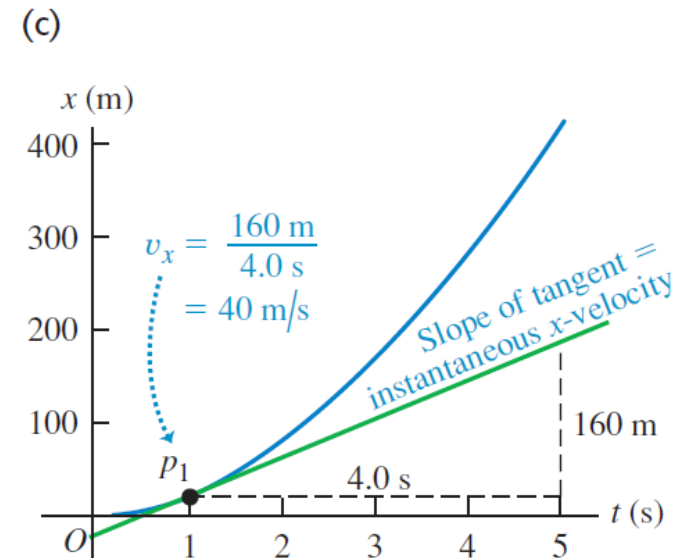
$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (\text{instantaneous } x\text{-velocity, straight-line motion})$$



As the average x -velocity $v_{\text{av-}x}$ is calculated over shorter and shorter time intervals ...



... its value $v_{\text{av-}x} = \Delta x / \Delta t$ approaches the instantaneous x -velocity.



The instantaneous x -velocity v_x at any given point equals the slope of the tangent to the x - t curve at that point.

基本的概念：加速度

进一步的需求

力会改变物体的速度，如何描述这一改变？

新的抽象

加速度

基本的概念：加速度

定义了瞬时速度后，速度就和位移一样，成为了时间的一个函数 $v(t)$ 。
通过类似的方法，可以定义平均加速度和瞬时加速度。

平均加速度

$$a_{\text{av-x}} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (\text{average } x\text{-acceleration, straight-line motion})$$

瞬时加速度

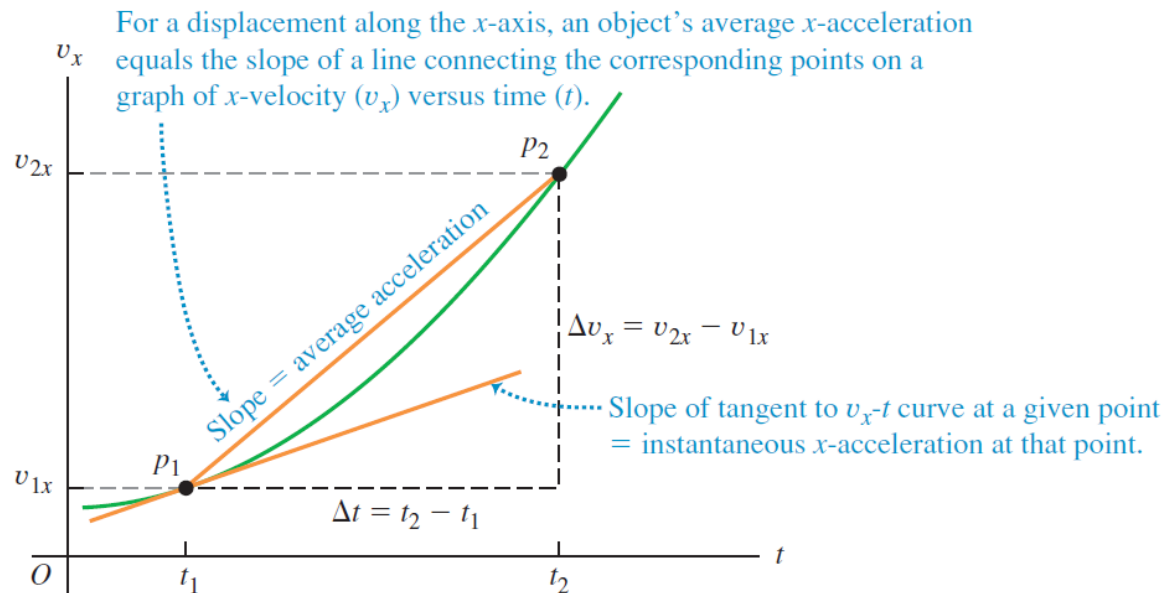
$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (\text{instantaneous } x\text{-acceleration, straight-line motion})$$

加速度是位移关于时间的二次导数：

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

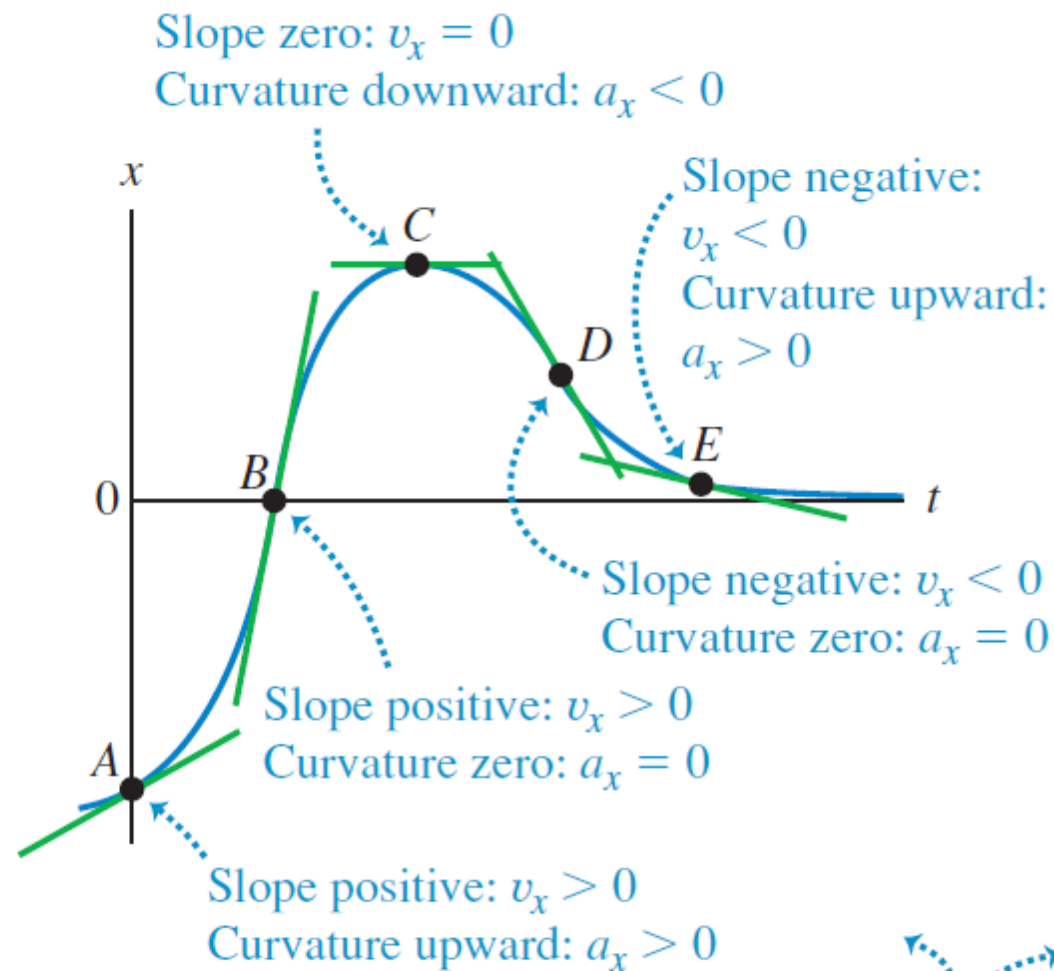
新的算符，代表微分两次

基本的概念： 加速度



v-t图

斜率表示加速度



The greater the curvature (upward or downward) of an object's x - t graph, the greater is the object's acceleration in the positive or negative x -direction.

数学小结：微分

Derivatives:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\sin ax = a \cos ax$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a \sin ax$$

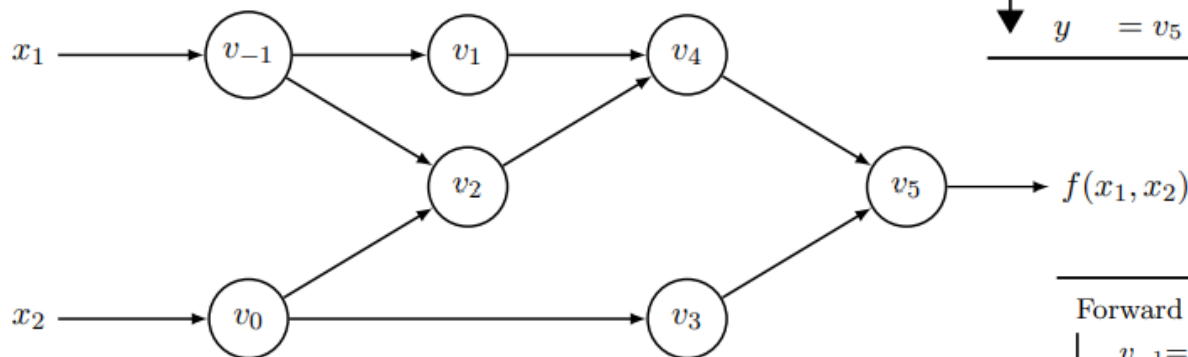
乘法法则:
$$\frac{d}{dx}(uv) = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dx}\right)$$

链式法则:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$$

自动微分：例子

链式法则：
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$$

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_1x_2 - \sin(x_2)$$



广泛用于Machine Learning, Deep Learning
中优化loss function

$$z = wx + b$$

$$y = \sigma(z)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(y - t)^2$$

Forward Primal Trace

$v_{-1} = x_1$	= 2
$v_0 = x_2$	= 5
$v_1 = \ln v_{-1}$	= $\ln 2$
$v_2 = v_{-1} \times v_0$	= 2×5
$v_3 = \sin v_0$	= $\sin 5$
$v_4 = v_1 + v_2$	= $0.693 + 10$
$v_5 = v_4 - v_3$	= $10.693 + 0.959$
$y = v_5$	= 11.652

Forward Tangent (Derivative) Trace

$\dot{v}_{-1} = \dot{x}_1$	= 1
$\dot{v}_0 = \dot{x}_2$	= 0
$\dot{v}_1 = \dot{v}_{-1}/v_{-1}$	= $1/2$
$\dot{v}_2 = \dot{v}_{-1} \times v_0 + \dot{v}_0 \times v_{-1}$	= $1 \times 5 + 0 \times 2$
$\dot{v}_3 = \dot{v}_0 \times \cos v_0$	= $0 \times \cos 5$
$\dot{v}_4 = \dot{v}_1 + \dot{v}_2$	= $0.5 + 5$
$\dot{v}_5 = \dot{v}_4 - \dot{v}_3$	= $5.5 - 0$
$\dot{y} = \dot{v}_5$	= 5.5

Forward Primal Trace

$v_{-1} = x_1$	= 2
$v_0 = x_2$	= 5
$v_1 = \ln v_{-1}$	= $\ln 2$
$v_2 = v_{-1} \times v_0$	= 2×5
$v_3 = \sin v_0$	= $\sin 5$
$v_4 = v_1 + v_2$	= $0.693 + 10$
$v_5 = v_4 - v_3$	= $10.693 + 0.959$
$y = v_5$	= 11.652

Reverse Adjoint (Derivative) Trace

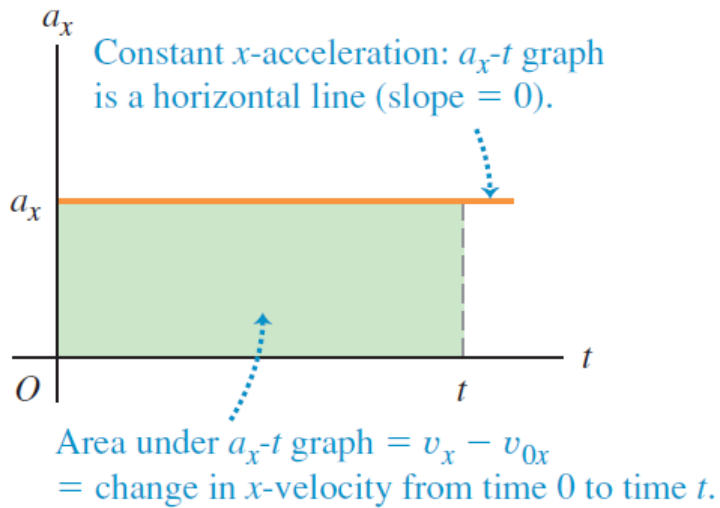
$\bar{x}_1 = \bar{v}_{-1}$	= 5.5
$\bar{x}_2 = \bar{v}_0$	= 1.716
$\bar{v}_{-1} = \bar{v}_{-1} + \bar{v}_1 \frac{\partial v_1}{\partial v_{-1}} = \bar{v}_{-1} + \bar{v}_1/v_{-1}$	= 5.5
$\bar{v}_0 = \bar{v}_0 + \bar{v}_2 \frac{\partial v_2}{\partial v_0} = \bar{v}_0 + \bar{v}_2 \times v_{-1}$	= 1.716
$\bar{v}_{-1} = \bar{v}_2 \frac{\partial v_2}{\partial v_{-1}} = \bar{v}_2 \times v_0$	= 5
$\bar{v}_0 = \bar{v}_3 \frac{\partial v_3}{\partial v_0} = \bar{v}_3 \times \cos v_0$	= -0.284
$\bar{v}_2 = \bar{v}_4 \frac{\partial v_4}{\partial v_2} = \bar{v}_4 \times 1$	= 1
$v_1 = v_4 \frac{\partial v_4}{\partial v_1} = v_4 \times 1$	= 1
$\bar{v}_3 = \bar{v}_5 \frac{\partial v_5}{\partial v_3} = \bar{v}_5 \times (-1)$	= -1
$\bar{v}_4 = \bar{v}_5 \frac{\partial v_5}{\partial v_4} = \bar{v}_5 \times 1$	= 1
$\bar{v}_5 = \bar{y}$	= 1

一条相反的道路：从加速度出发

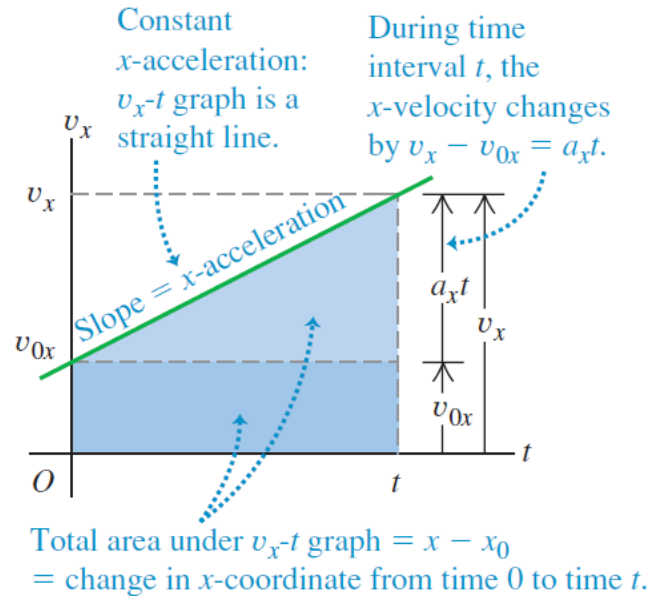
常见的需求：知道加速度（受力情况），如何描述物体运动？

新的工具：积分

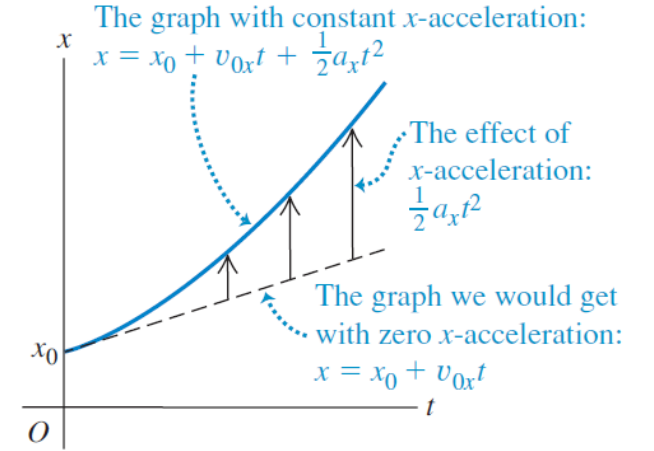
例子：匀加速运动



a_x 为常数



$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (\text{constant } x\text{-acceleration only})$$

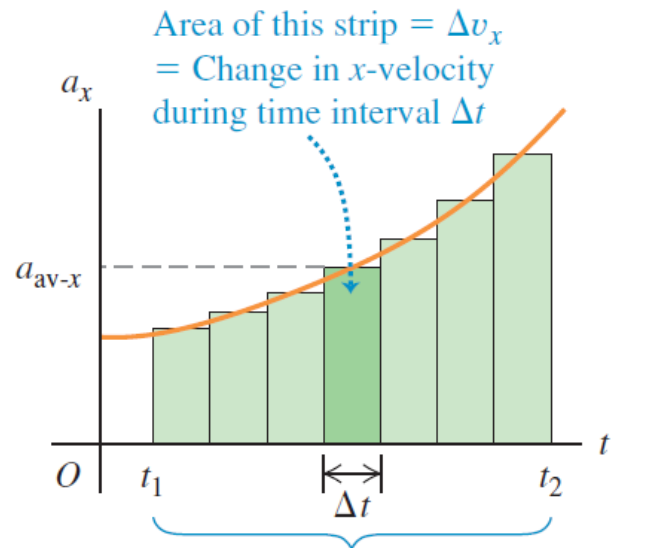


$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (\text{constant } x\text{-acceleration only})$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

一条相反的道路：从加速度出发

更一般的情况：变加速过程



Total area under the $x-t$ graph from t_1 to t_2
= Net change in x -velocity from t_1 to t_2

变加速直线运动

$$v_x - v_{0x} \approx \sum_i a_x(t_i) \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i a_x(t_i) \Delta t$$

$$\text{记作: } v_x - v_{0x} = \int_{t_1}^{t_2} a_x(t) dt$$

变加速曲线运动

需求运动的矢量描述, *we'll see it soon*

数学小结：积分

Integrals:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

例子：自由落体

- 重力加速度 g

- $v(t) = \int_0^t g dt$

- $s(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (\int_0^t g dt) dt$

一维运动小结：积分

概念：

位移与时间构成时空坐标

位移：速度对时间的积累

速度：位移相对于时间的改变，加速度相对于时间的积累

加速度：速度相对于时间的改变

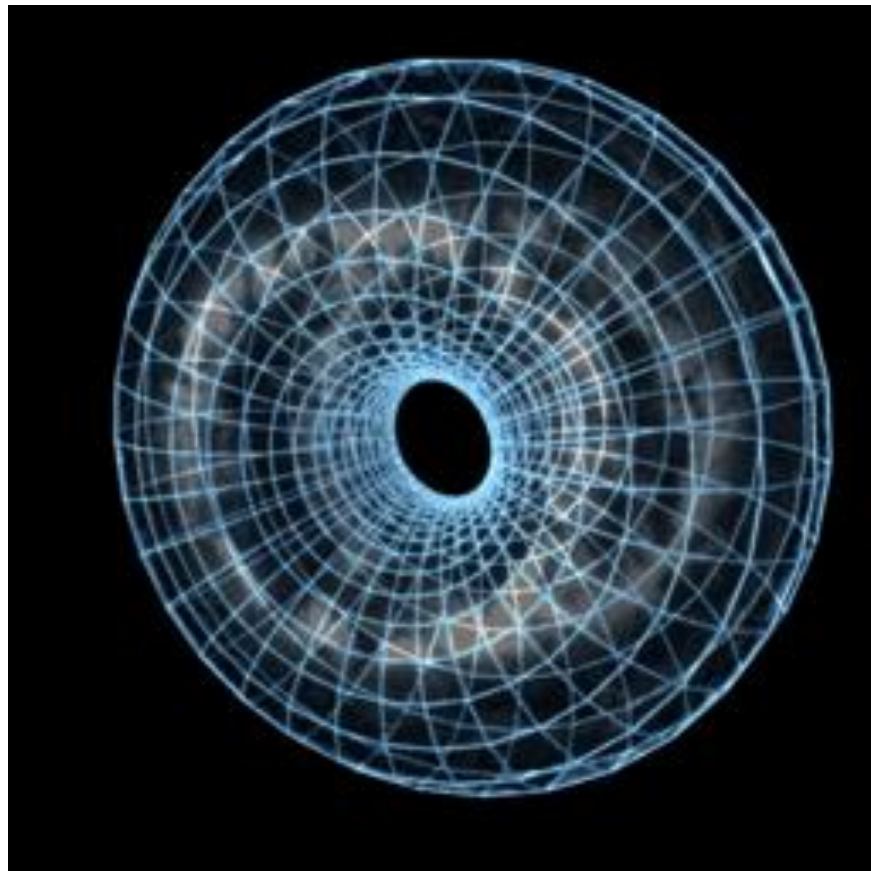
数学：

平均 \rightarrow 瞬时极限

微分

积分

推广：高维运动



我们生活在三维的世界里，
需要描述**三维**世界中的运动。
世界限制了我们的想象力，
如何对**更高维度**的世界进行描述？

新的工具：**矢量**

高维运动： 矢量

3+1维时空中的坐标 (\vec{r}, t)

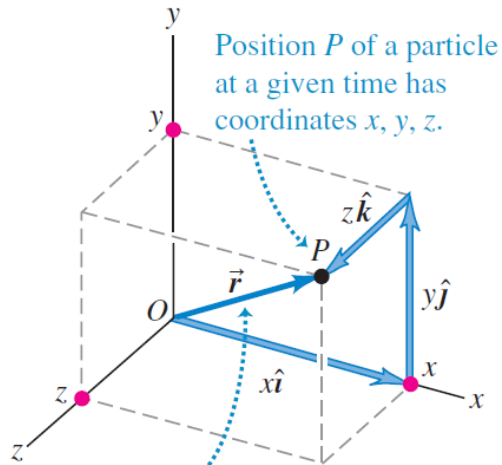
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

矢量需要有些什么性质？

需要有大小 $|\vec{r}|$ ，有方向 $\vec{r}/|\vec{r}|$ ，(还需要一个原点)
需要可以加 (描述连续两段运动)

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{and} \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

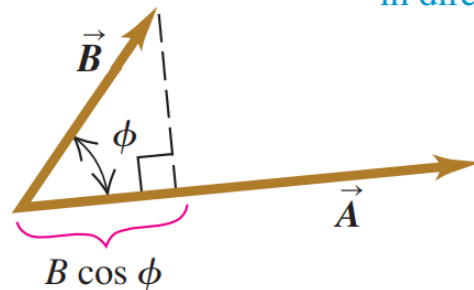
在描述运动中不需要，但在描述力，力矩和能量时，它需要可以乘(点乘，叉乘)



位置矢量 \vec{r}
 $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

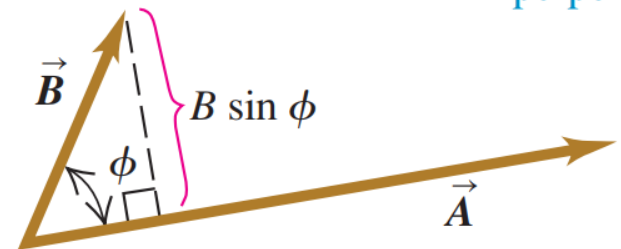
位置矢量 \vec{r}

$\vec{A} \cdot \vec{B}$ equals $A(B \cos \phi)$.
(Magnitude of \vec{A}) times (Component of \vec{B} in direction of \vec{A})



(Magnitude of $\vec{A} \times \vec{B}$) equals $A(B \sin \phi)$.

(Magnitude of \vec{A}) times (Component of \vec{B} perpendicular to \vec{A})

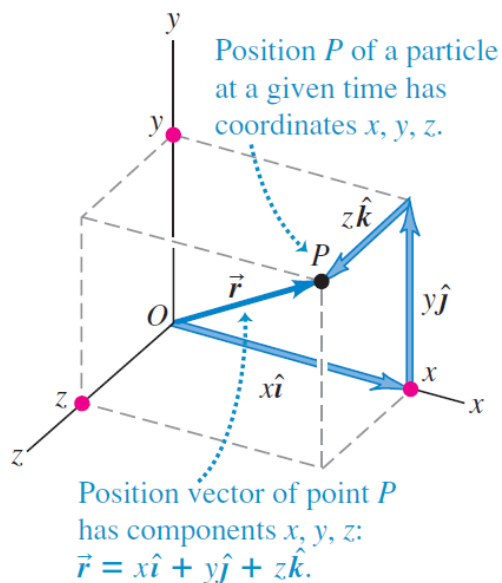


高维运动： 矢量

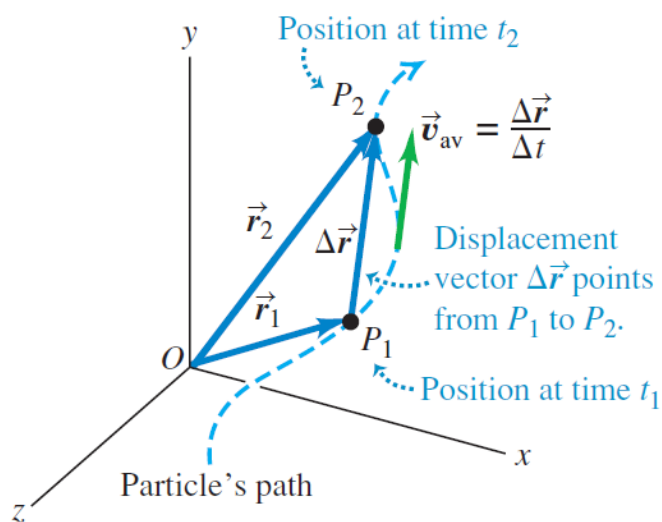
3+1维时空中的坐标 (\vec{r}, t)

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

在三维时空中一样可以定义速度，它是个**矢量**



位置矢量 \vec{r}



位移矢量 $\Delta\vec{r}$

平均速度矢量

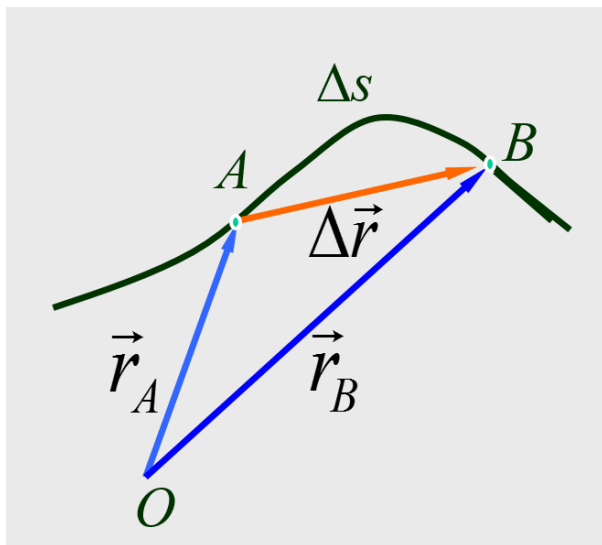
$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

(瞬时) 速度矢量

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

高维运动：方向带来的复杂性

位移和路程



位移为**矢量**，路程为**标量**

$$\Delta s \neq |\Delta \vec{r}|$$

当时间间隔**很小时**： $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta s = |\Delta \vec{r}|$

记为： **$ds = |d\vec{r}|$**

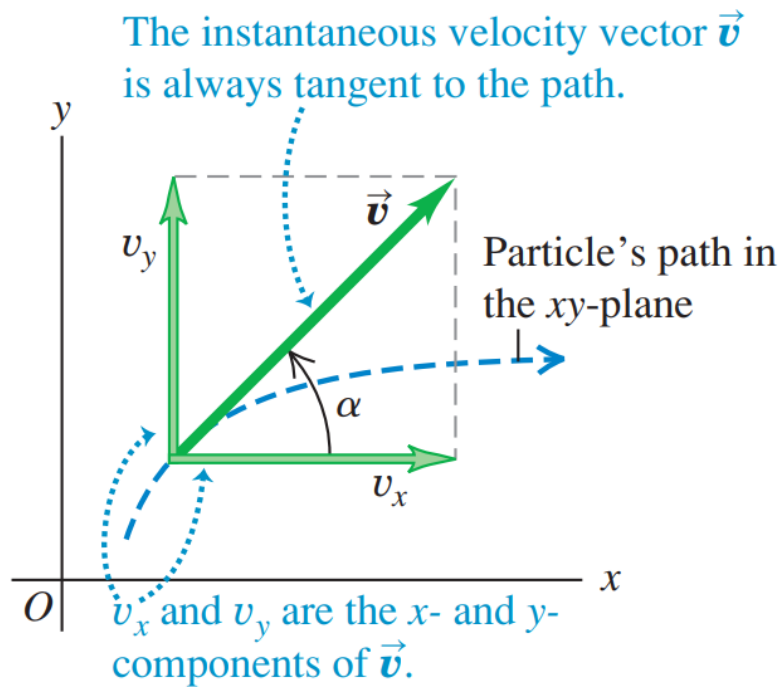
速度与速率

速率 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ 代表了速度的**大小**，是**标量**

速度的方向： $\Delta \vec{r} / |\Delta \vec{r}|$

速度的分量形式

直角坐标系



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

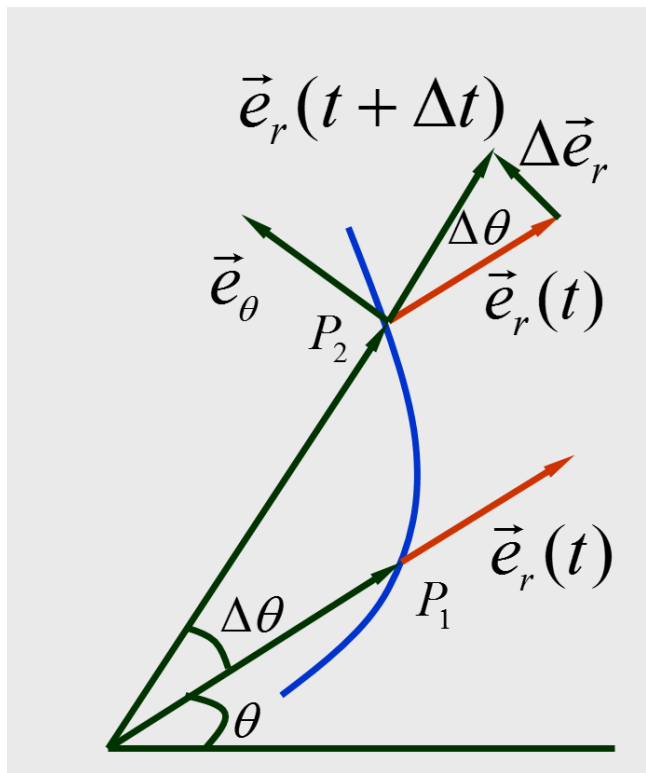
$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = 0$$

笛卡尔坐标单位矢量不随时间变化。

速度的分量形式（行星的运动）

极坐标系

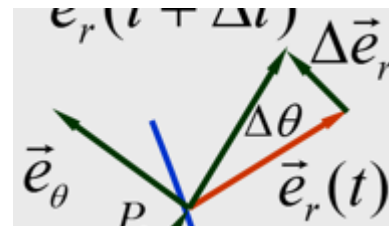
极坐标下，单位矢量是时间的函数 $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ 时，方向： $\Delta\vec{e}_r // \vec{e}_\theta$

大小： $|\Delta\vec{e}_r| = |\vec{e}_r|\Delta\theta$



$$\Delta\vec{e}_r = \Delta\theta\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{e}_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{e}_\theta = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$

速度的分量形式

极坐标系

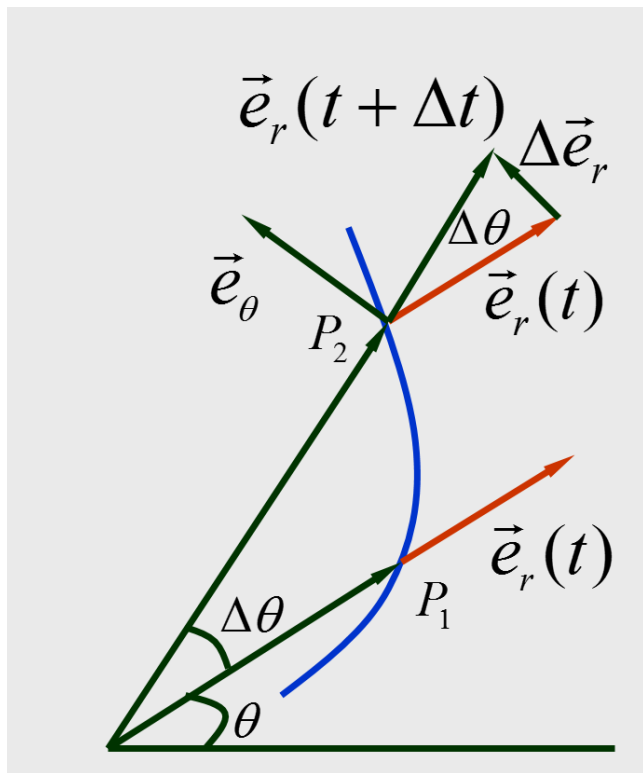
极坐标下，单位矢量是时间的函数 $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$

物理意义

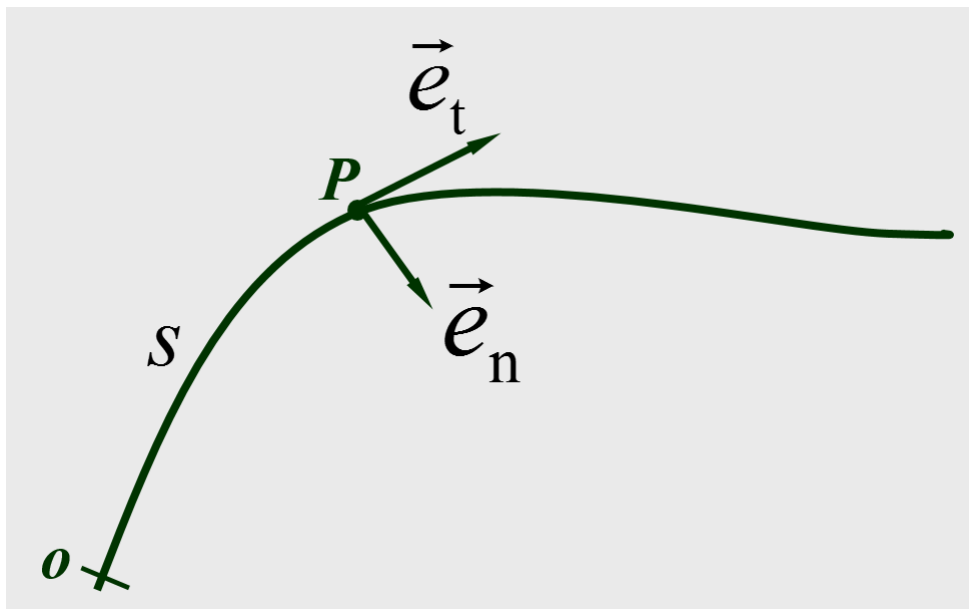
径向速度 $\frac{dr}{dt}\vec{e}_r$ ，旋转半径的变化

角向速度 $r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$ ，半径方向的变化（角速度 $\frac{d\theta}{dt}$ ）



速度的分量形式：一般形式

自然坐标系



\vec{e}_t : 物体运动轨迹的切线方向

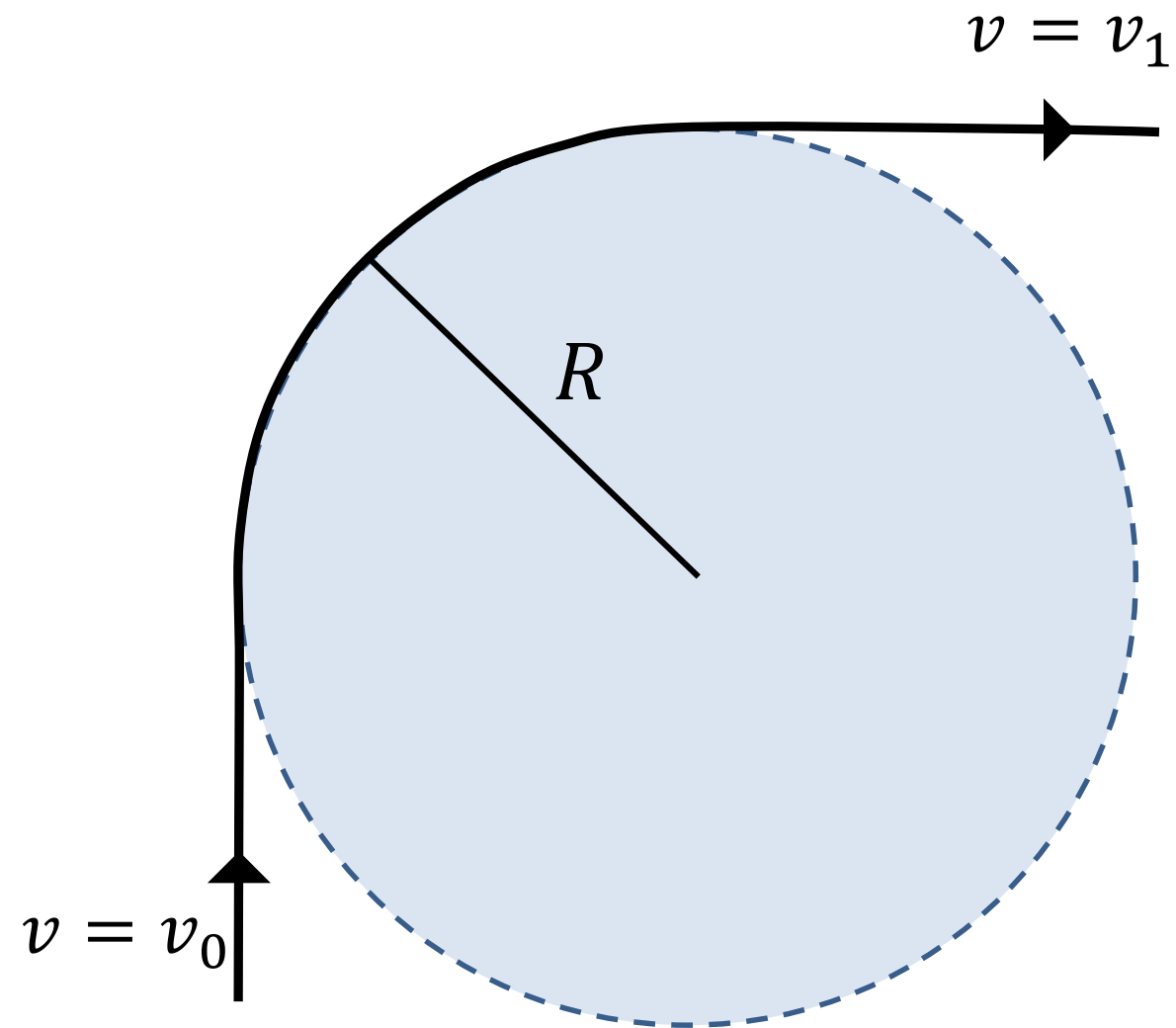
\vec{e}_n : 物体运动轨迹的（内）法线方向

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \vec{e}_t \\ &= \frac{ds}{dt} \vec{e}_t = v \vec{e}_t\end{aligned}$$

速度矢量方向被定义为沿轨迹的切线方向 \vec{e}_t

\vec{e}_t , \vec{e}_n 均为时间的函数

例子：加速过弯



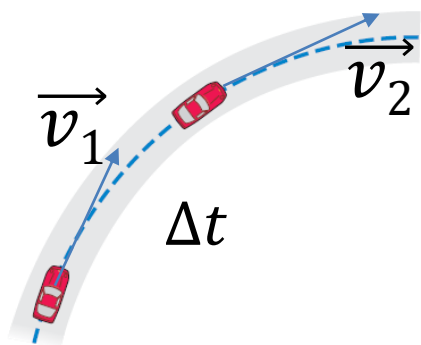
$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$

Diagram illustrating the decomposition of the velocity vector \vec{v} into radial and tangential components:

- The radial component $\frac{dr}{dt} \vec{e}_r$ is shown to be zero (0).
- The tangential component is $r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$.

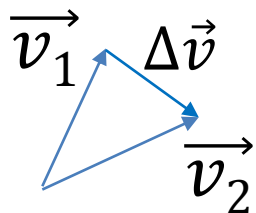
高维运动：加速度

与1维情况相似，我们同样可以在高维定义加速度，它也是**矢量**



平均加速度矢量

$$\vec{a}_{\text{av}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



(瞬时) 加速度矢量

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

高维运动：加速度的分量形式

直角坐标系

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$$

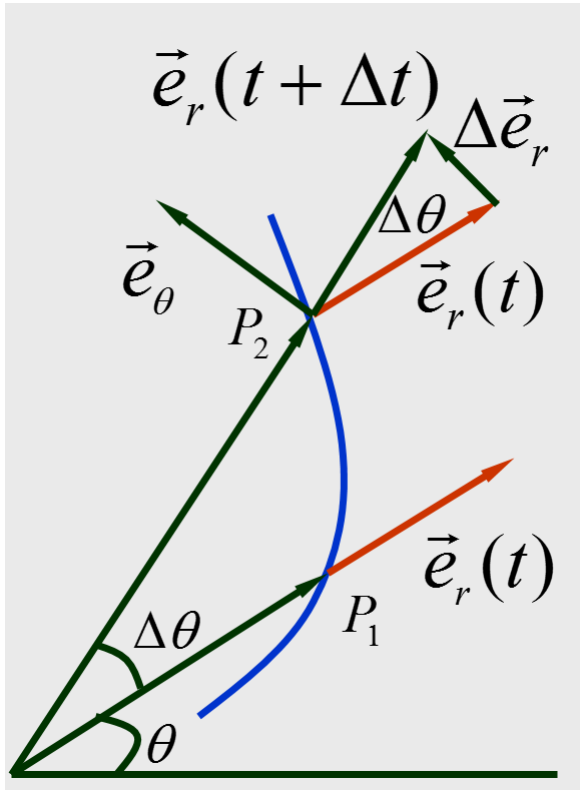
形式简单，单位向量不是时间的函数

平面极坐标系

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta\right)}{dt} \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \end{aligned}$$

高维运动：加速度的分量形式

极坐标系单位矢量的求导

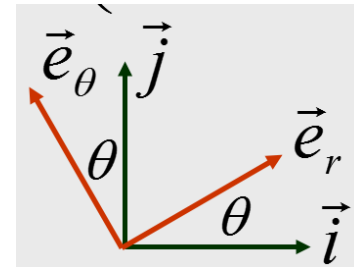


$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$

类似可以得到

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r$$

另一种数学推导：



投影回直角坐标系下

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

根据单位向量的定义得到的一般形式

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

单位向量相互垂直

$$\dot{\vec{e}}_r = (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \dot{\theta} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

求导可得

$$\dot{\vec{e}}_\theta = (-\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \dot{\theta} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

高维运动：加速度的分量形式

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta\right)}{dt} \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta - r \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r \\ &= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) \vec{e}_r + \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}\right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

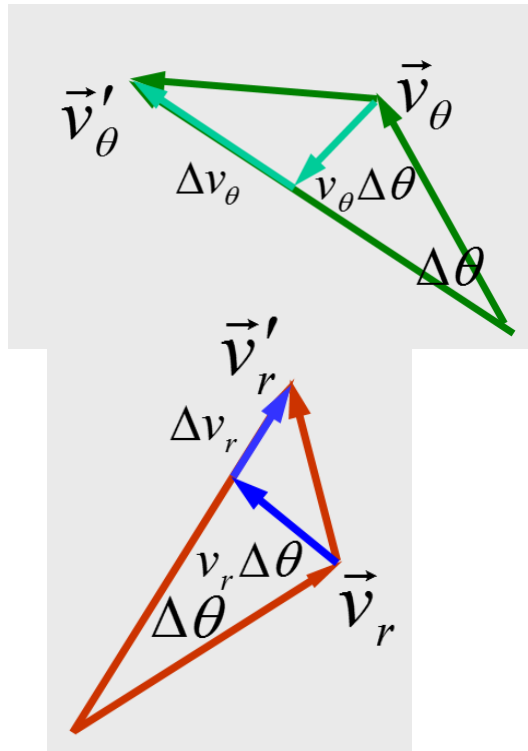
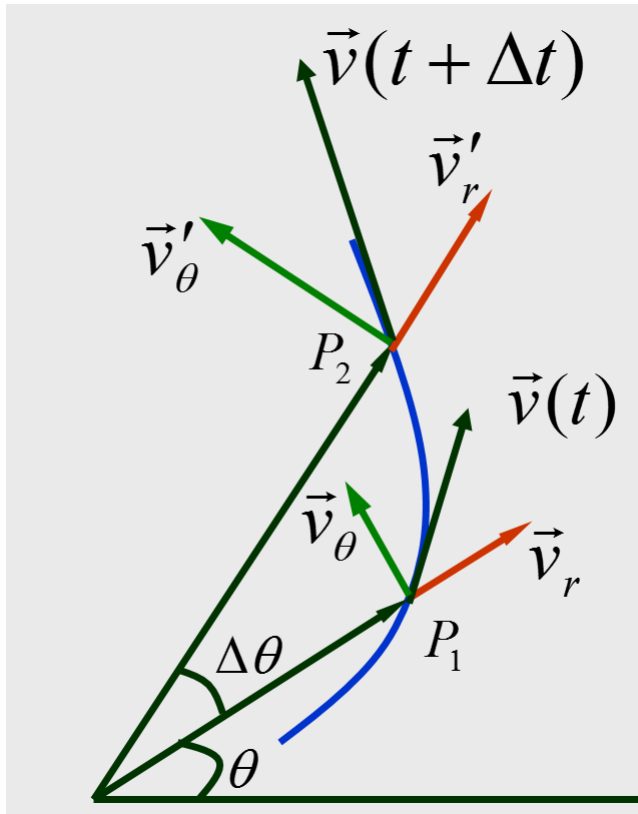
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

物理意义？

高维运动：加速度分量的物理意义

从速度出发

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$



$$\lim \frac{\Delta v_r}{\Delta t} = \ddot{r} \quad \text{径向速度大小变化}$$

$$\lim v_r \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \dot{r}\dot{\theta} \quad \text{径向速度方向变化}$$

$$\lim v_\theta \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = -r\dot{\theta}^2 \quad \text{角向速度方向变化}$$

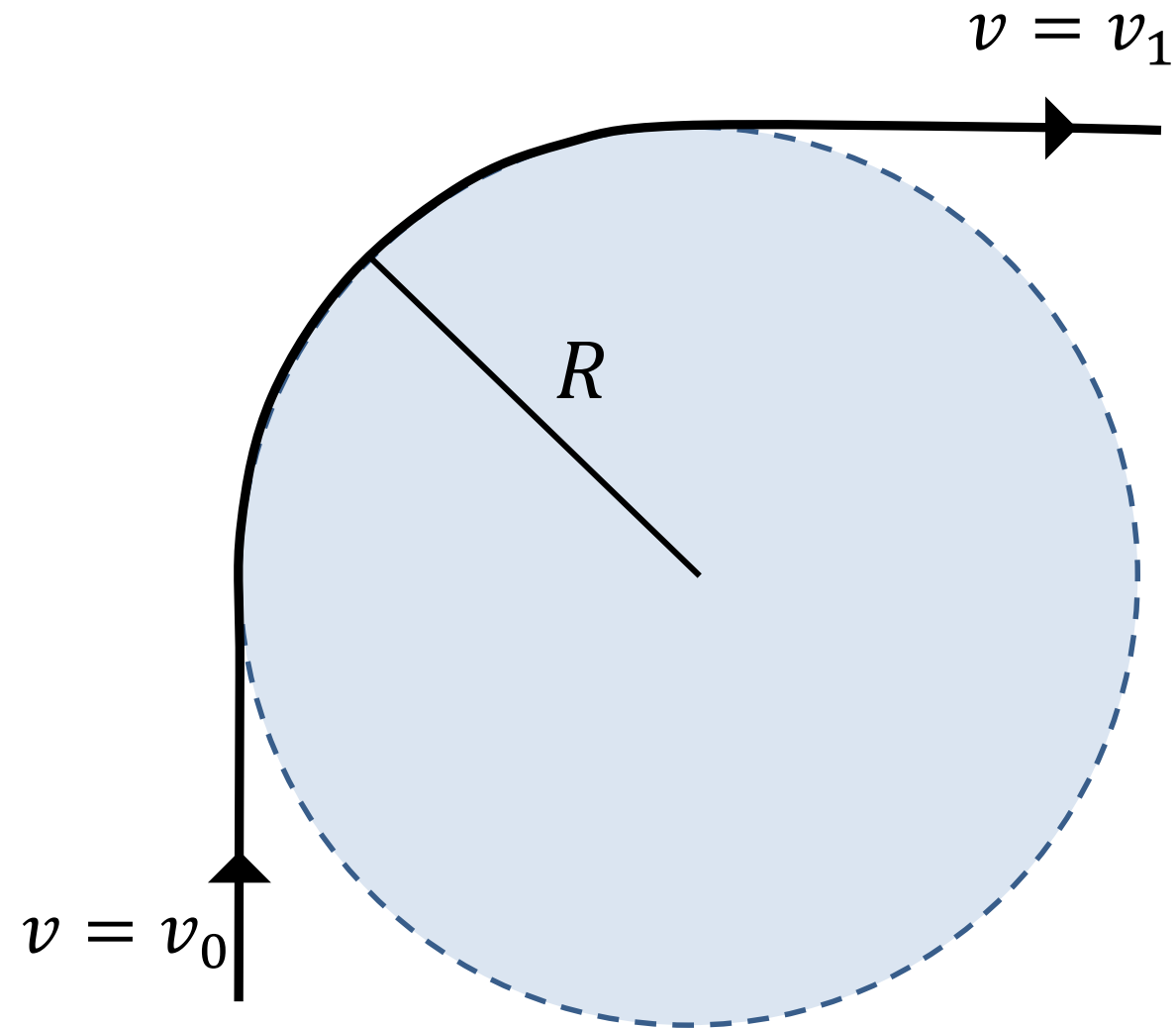
$$\lim \frac{\Delta v_\theta}{\Delta t} = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad \text{角向速度大小变化}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

离心力

科里奥利力

例子：加速过弯



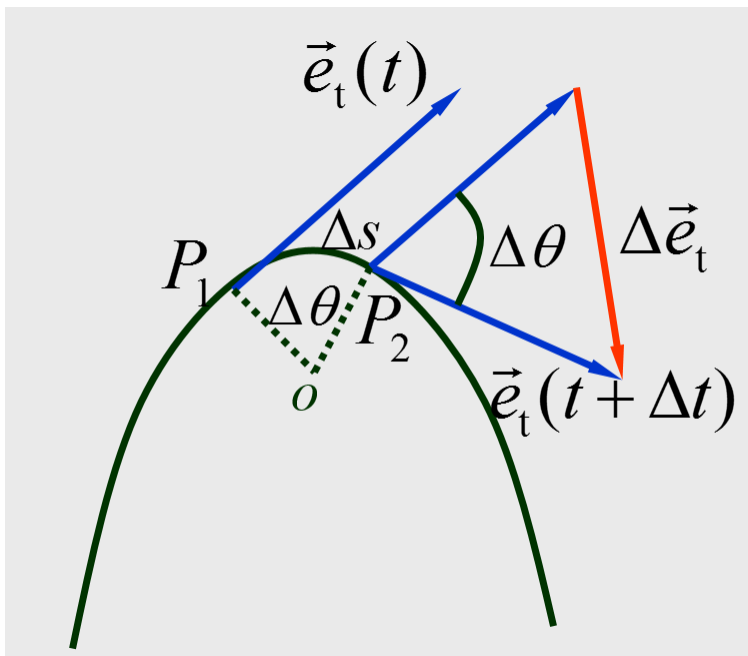
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$r\dot{\theta}^2 = v^2/r$$

$$r\ddot{\theta}$$

高维运动：自然坐标系



\vec{e}_t : 物体运动轨迹的切线方向

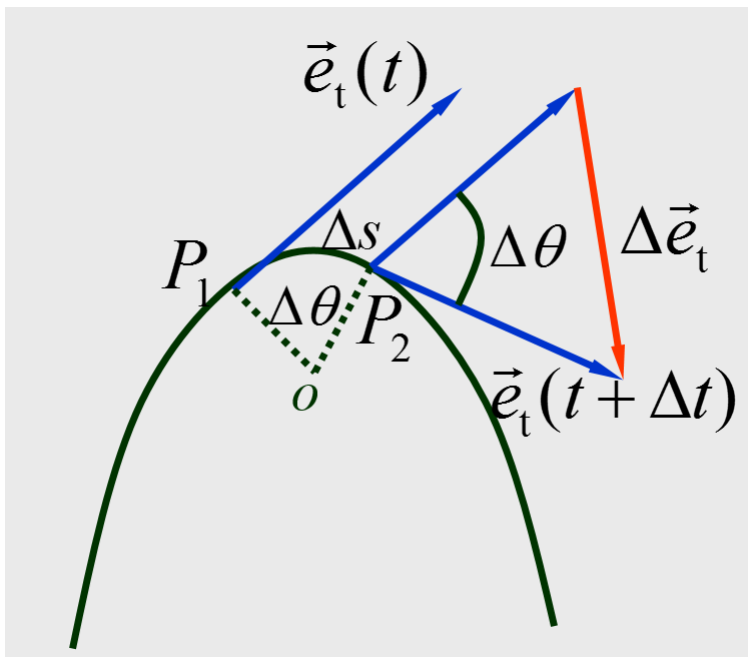
\vec{e}_n : 物体运动轨迹的（内）法线方向

只有切向速度 $\vec{v} = v\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$$\Delta\vec{e}_t = \vec{e}_t(t + \Delta t) - \vec{e}_t(t)$$

高维运动：自然坐标系



注意此处法线单位矢量为内法线方向

$$\Delta \vec{e}_t = \vec{e}_t(t + \Delta t) - \vec{e}_t(t)$$

$$\text{大小: } |\Delta \vec{e}_t| = |\vec{e}_t| \Delta \theta = \Delta \theta \quad \text{方向: } \Delta \vec{e}_t // \vec{e}_n$$

$$\Delta \vec{e}_t = \Delta \theta \vec{e}_n$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \vec{e}_n = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_n$$

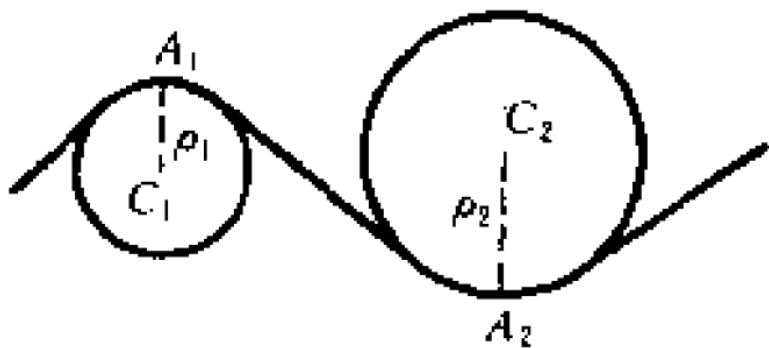
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_n$$

切向加速度 法向加速度

高维运动：自然坐标系

自然坐标系如何去描述一般的轨迹？

简单的情形：轨迹是一个圆 $v \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_n = v \frac{(ds/R)}{dt} \vec{e}_n = \frac{v ds}{R dt} \vec{e}_n = \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$

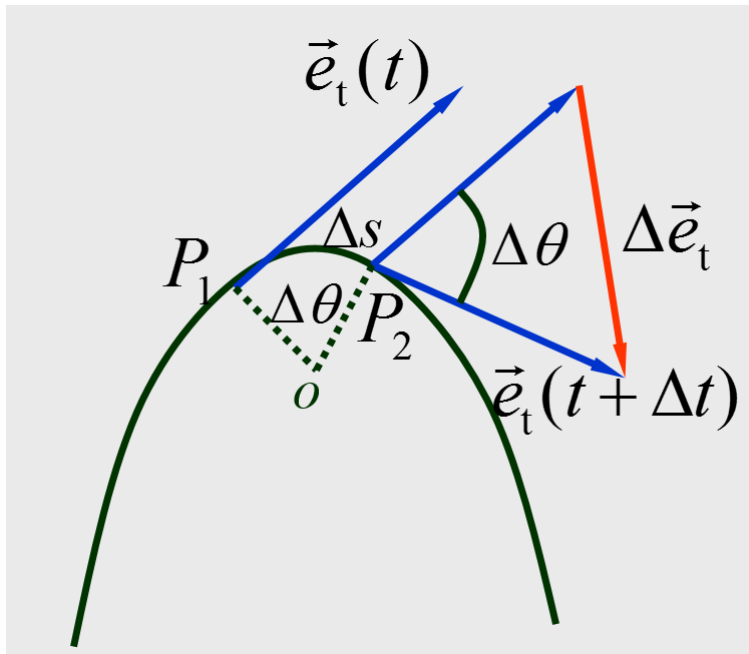


一般的情形：任意轨道，找到一个圆去和这一时刻的轨道相切，假设内切圆半径为 ρ ，那么法向加速度

$$v \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

根据直角坐标系下的轨迹方程，可以求出这个半径 ρ

*高维运动：自然坐标系



$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{ds} v$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

Δs : $P_1 \rightarrow P_2$ 间的路程

$$\text{曲率: } k = \frac{d\theta}{ds} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

$$\text{曲率半径: } \rho = \frac{1}{k}$$

*曲率的计算

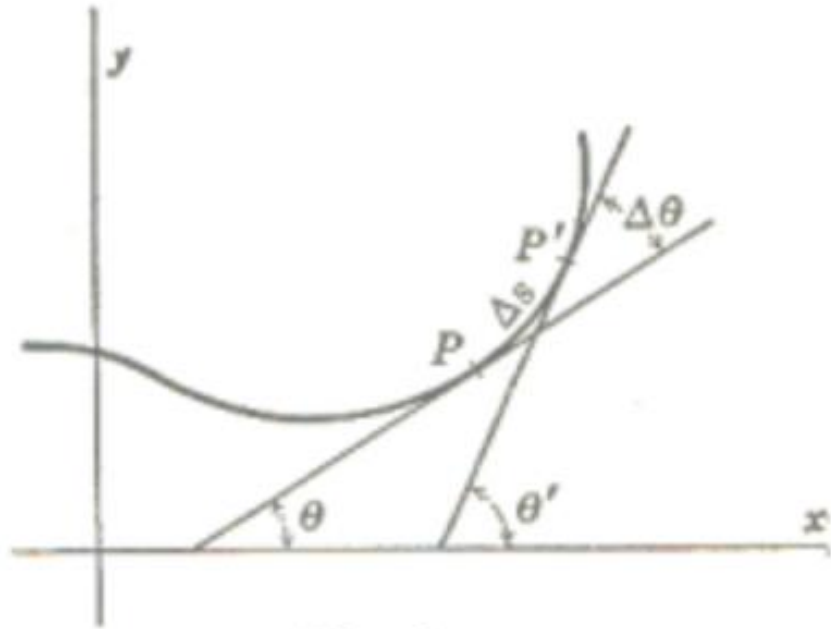


Fig. 4

曲率: $k = \frac{d\theta}{ds} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$

继续使用微分链式法则,

$$\tan \theta = dy/dx$$

$$\theta = \arctan(dy/dx).$$

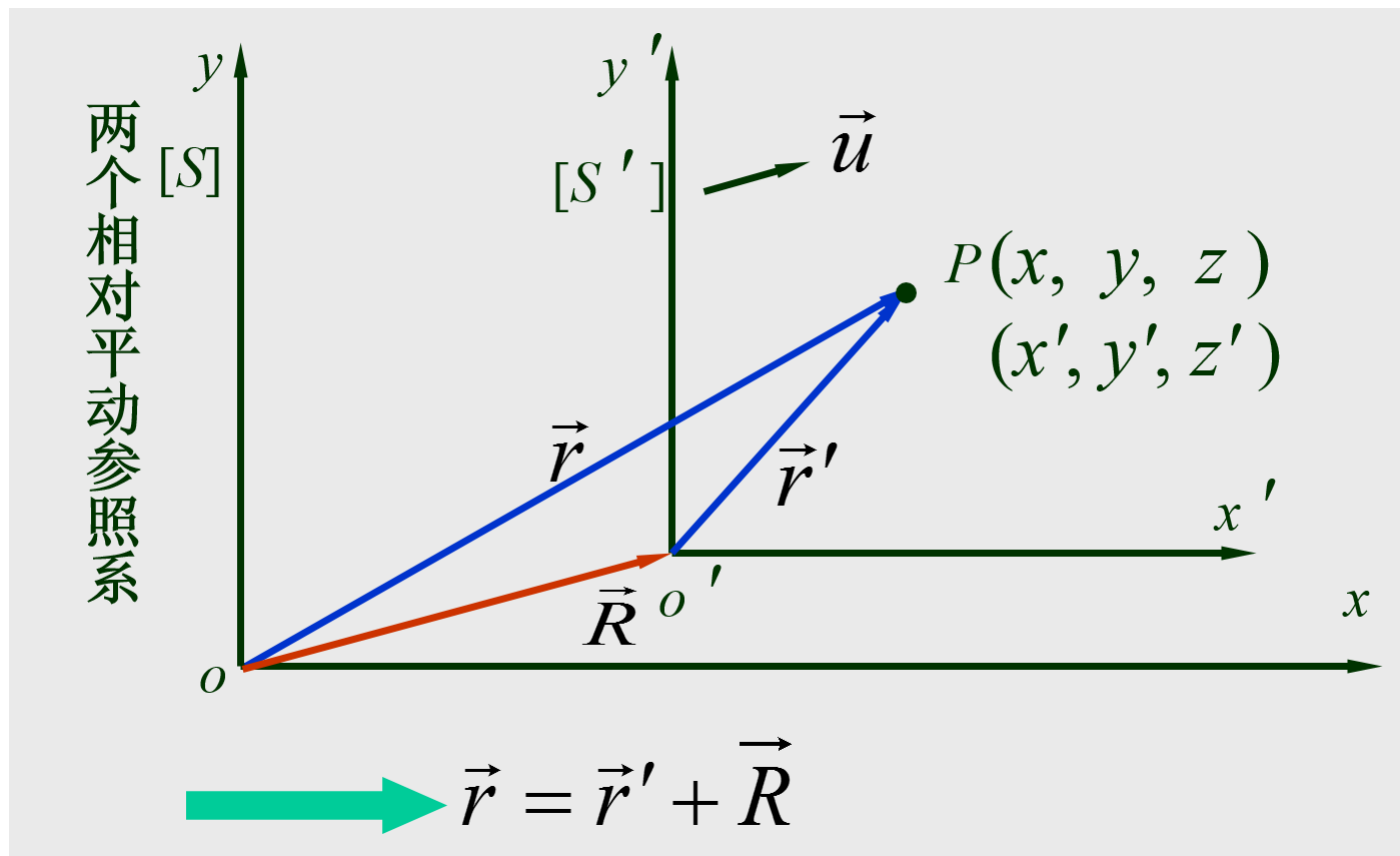
$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \cdot K = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}$$

此处可正可负, 由于之前定义为内法线方向, 故取绝对值

相对运动：伽利略变换



$$t = t'$$

时间不随着参考系的变化而变化

速度

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

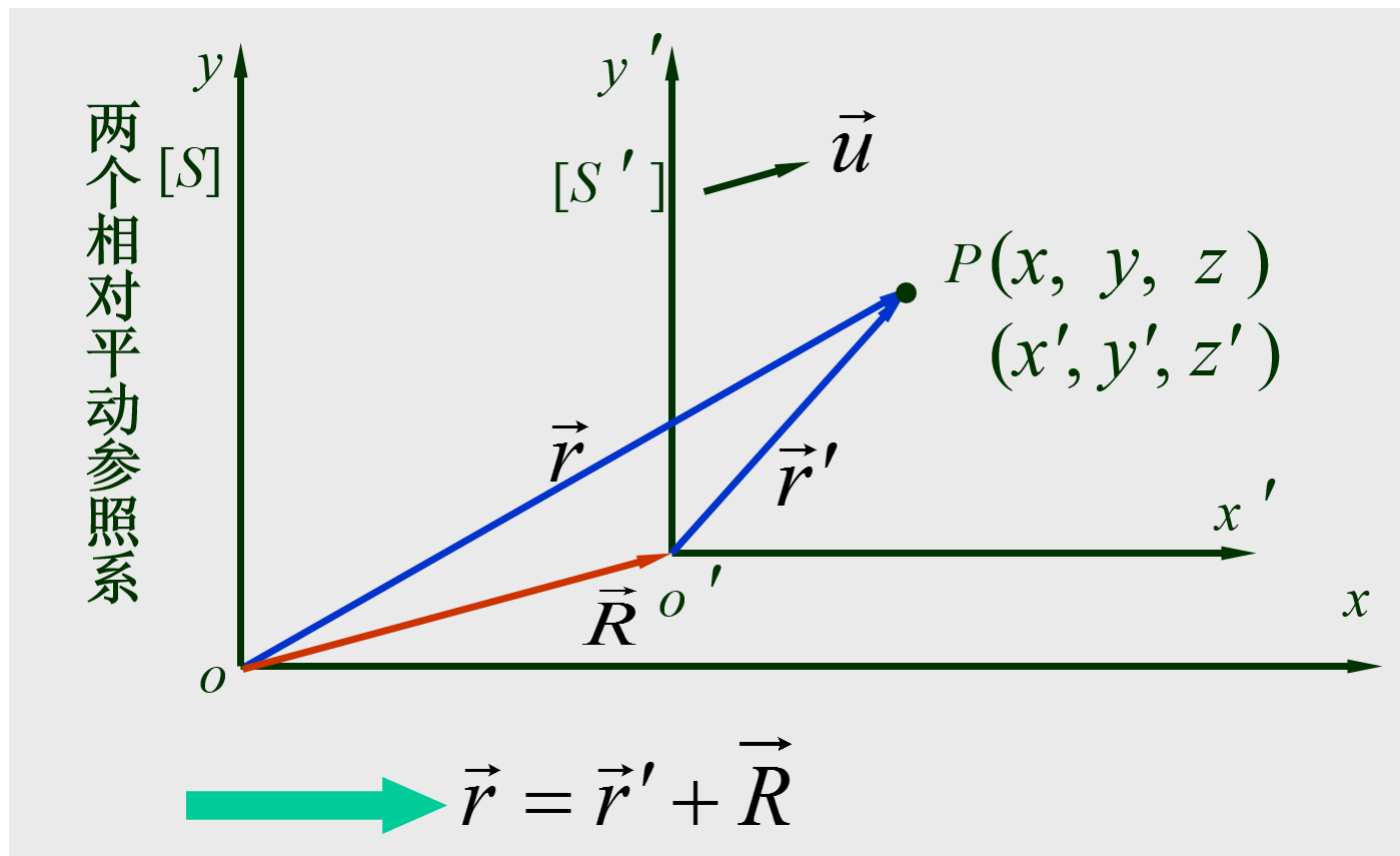
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{u} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \vec{v}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

物体相对于S系的速度=物体相对于S'系速度+S'系相对于S系的速度

相对运动：伽利略变换



$$t = t'$$

时间不随着参考系的变化而变化

加速度

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \vec{a}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \frac{d\vec{u}}{dt} \quad \vec{u} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

时空观的演化

	物理原理	时间	空间	数学描述
亚里士多德	地球不动	绝对	绝对	欧氏几何
伽利略/牛顿	舟行不觉	绝对	相对	欧氏几何
爱因斯坦	光速不变	相对	相对	非欧几何

在后面课题的相对论部分，我们将介绍爱因斯坦的时空观和相对应的相对运动。