狭义相对论

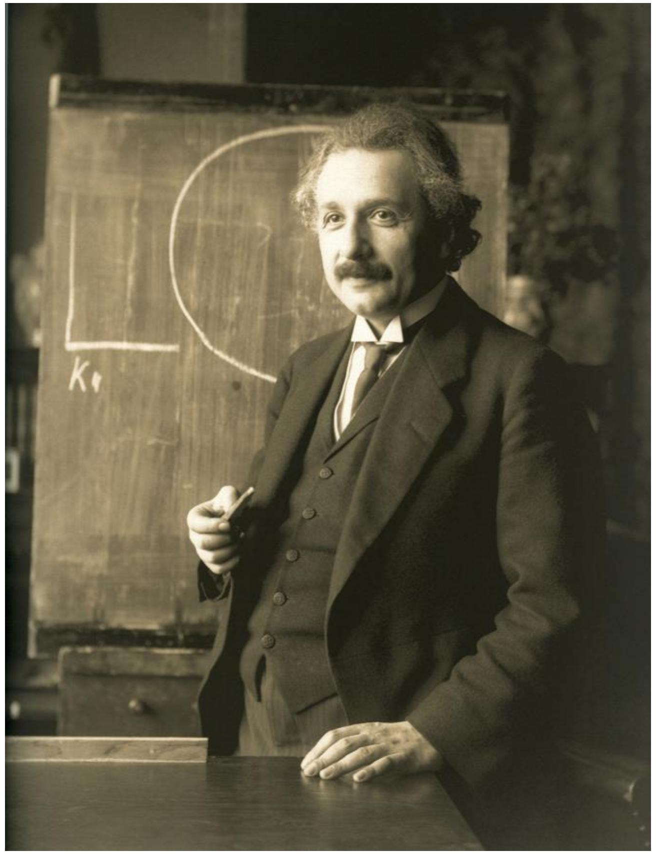
“光锥之内就是命运。”

《三体》

相对论

- 狭义相对论(1905):可以解决物理规律在惯性参照系之间的物理量的转换问题。
  （伽里略相对性是狭义相对性理论在低速度下的近似）

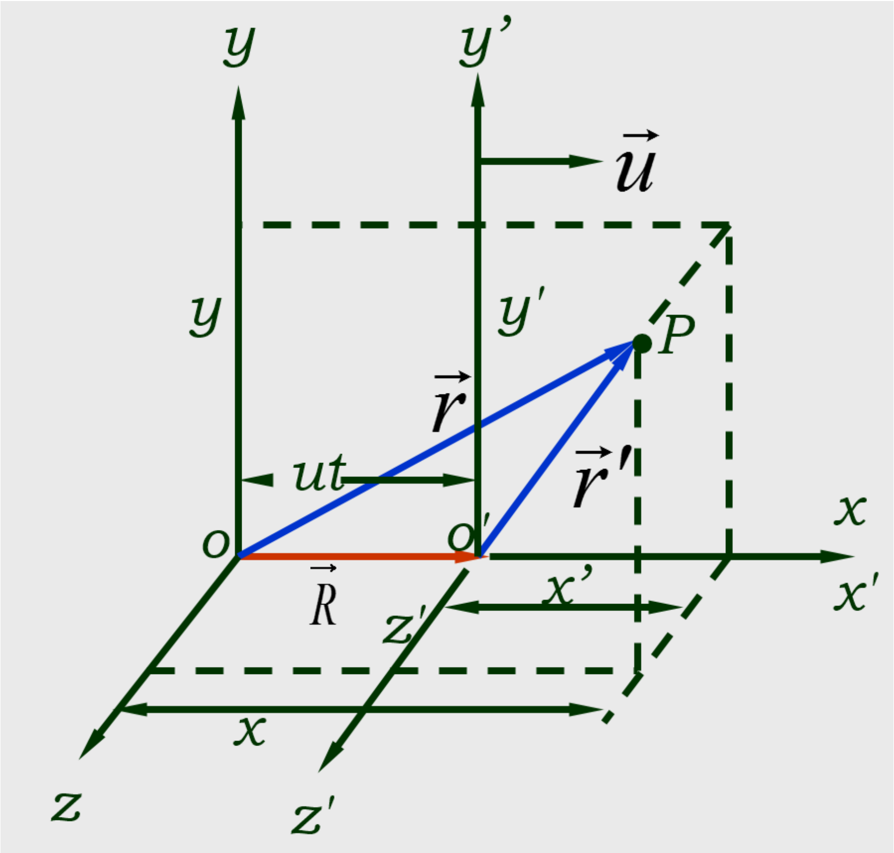
- 广义相对论(1915):解决非惯性参照系之间物理规律的转换问题，主要是引力理论。
  （狭义相对论是弱引力场下的近似）



狭义相对论主要内容

- 惯性参照系之间，时空坐标的Lorentz变换；
- 物理规律的协变性——物理规律在任何坐标系中可表示为相同的形式；
- 麦克斯韦方程、洛伦兹力公式的协变形式；
- 力学基本规律推广为具有协变性的相对论力学

回顾: 经典牛顿力学中的相对性原理(伽利略变换)



$$\begin{cases} \begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \\ t = t' \end{cases}$$

伽利略(Galilean)变换:

描述经典力学中一个事件在两个不同的惯性参考系下的变换。

- 牛顿力学方程（牛顿定律）在伽利略变换下保持不变。
- 时间是绝对的，不同事件的时间间隔跟参考系无关。
- 长度测量跟参考系无关。

牛顿定律的力学相对性原理(伽利略变换)

$$S \downarrow S' \begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad \begin{cases} a'_x = a_x - \dfrac{\Delta u}{\Delta t} \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \xrightarrow[u\text{是恒量}]{t=t'} \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

$$S' \downarrow S \begin{cases} v_x = v'_x + u \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = a'_x + \dfrac{\Delta u}{\Delta t'} \\ a_y = a'_y \\ a_z = a'_z \end{cases} \xrightarrow[u\text{是恒量}]{t=t'} \begin{cases} a_x = a'_x \\ a_y = a'_y \\ a_z = a'_z \end{cases}$$

在两个惯性系中 $\vec{a}' = \vec{a}$

S系	$\vec{F}$	m	$\vec{a}$	$\vec{F} = m\vec{a}$
S'系	$\vec{F}'$	m'	$\vec{a}'$	$\vec{F}' = m'\vec{a}'$

在牛顿力学中，力与参考系无关，质量与运动无关。

宏观低速物体的力学规律在任何惯性系中形式相同

或：力学的基本运动规律在所有惯性系中可以表示为相同形式

或：所有惯性系都是等价的

麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

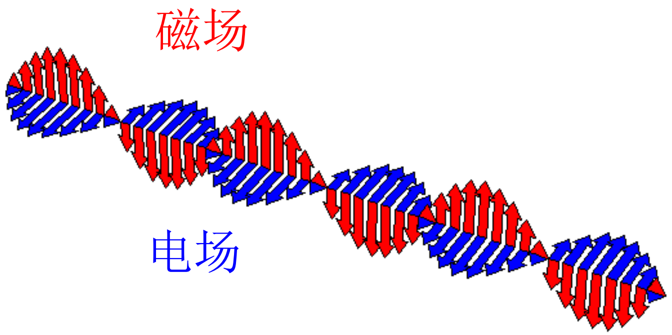
平面波的波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

μ0=4π×10^-7N/A²

ε0=8.854187818×10^ -12 (F/m)



电磁波速度=光速

19世纪最伟大的科学发现——麦克斯韦电磁场理论（1865年）

电磁场，电磁波，电磁辐射…

光是电磁波；无线电时代

20世纪——相对论和量子力学

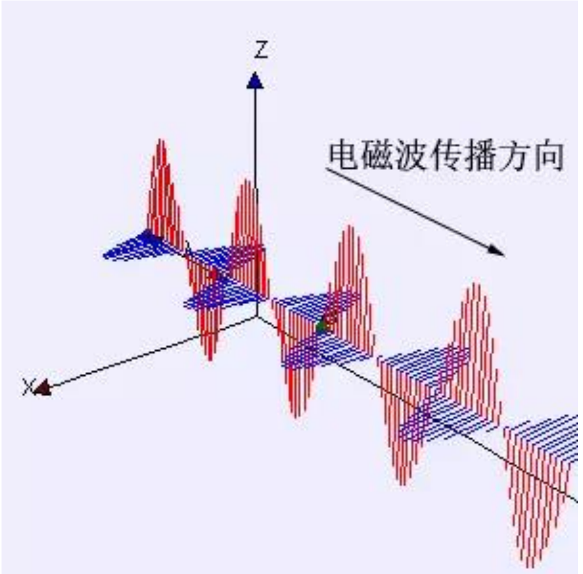
伽利略变换在处理电磁场方程的局限性

考察一维波动方程（φ 可取 E_i 或 H_i）

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\Big\Downarrow \qquad \text{GT}: \begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

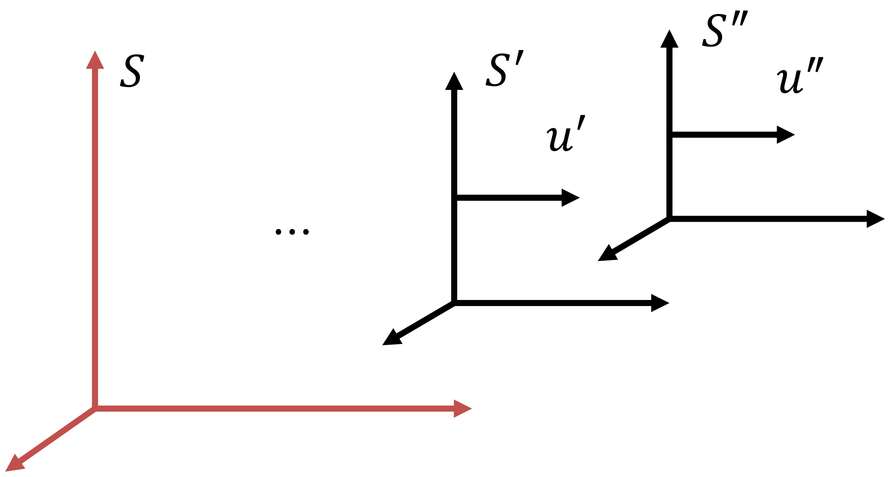
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} + \underbrace{\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial t'} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}} = 0$$



电磁波的波动方程在GT变化下不是协变的！

伽利略变换在处理电磁场方程的局限性

如果光速服从伽利略变换，那么存在一个特定的参考系，使得麦克斯韦方程组成立（牛顿相对性原理的失效）。



•特定的惯性参考系

•绝对惯性系

•以太系(ether)

- 光也像声波一样， 是通过某种特殊的介质以太而传播.
- 以太假设:很轻、弥漫于整个宇宙空间、绝对静止、与运动物体不产生阻力或摩擦;光在其中的传播速度为c;光是横波，以太像固体一样刚度很大，甚至远超过钢铁.

狭义相对论

- 1904年，Lorentz提出了Lorentz变换;在这个变换下，麦克斯韦方程组在不同的惯性参照系之间变换时，其形式保持不变，从而满足相对性原理.

- 狭义相对论（1895~1905）　Einstein
  – 测量地球相对以太的运动（迈克尔孙干涉实验）→fail
  – 以太不存在（光的传播不依赖介质）？光速不变？
  – 电动力学（Maxwell理论）要求光速不变，与伽利略时空观矛盾
  – 解决矛盾的关键：时间不是绝对的，“同时”具有相对性

狭义相对论的基本假设

- 一切物理规律在任何惯性系中形式相同。所有惯性系都是等价的。相对性原理

$$x = x + vt; \quad \begin{array}{l} \longrightarrow F = ma \\ \xrightarrow{\text{X}} \text{Maxwell equations} \end{array}$$

- 真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为c，与参考系的选择无关。光速不变原理

麦克斯韦方程组确定出的光（电磁波）的速度不依赖参考系的选择

洛伦兹变换

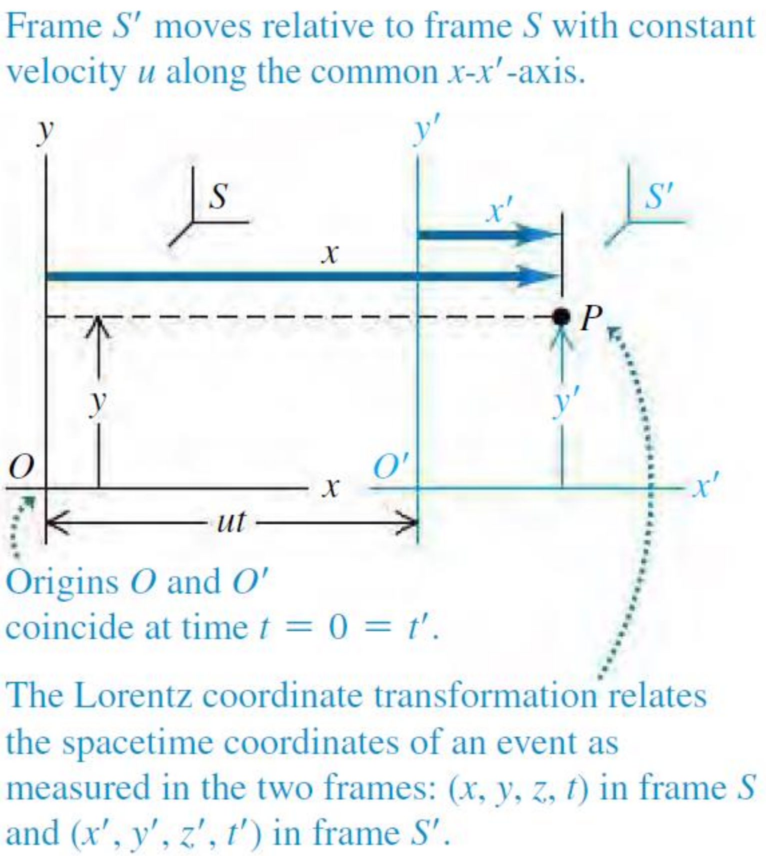
事件(event)：时空中的一个瞬间，由参考系的坐标(x, t)标记

惯性系S和S’：　坐标轴彼此平行；

S’相对于S以速度$\vec{u}$沿x轴正方向运动；

两个参考系原点重合时，同时开始计时；

事件(x=0, t=0)与事件(x’=0, t’=0)相同



在S参考系中t时刻后，在S’系中x’处的点在S中的位置：

$$x = ut + x'\sqrt{1 - u^2/c^2} \qquad x' = \gamma(x - ut)$$

$$\beta \equiv \frac{u}{c} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

在S’参考系中t’时刻后，在S系中x处的点在S’中的位置：

$$x' = -ut' + x\sqrt{1 - u^2/c^2} \qquad t' = \gamma(t - ux/c^2)$$

洛伦兹变换：x方向

$$\beta \equiv \frac{u}{c} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S系 ➞ S'系

$$\begin{cases} x' = \gamma(x-ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

S'系 ➞ S系

$$\begin{cases} x = \gamma(x'+ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

若$t'_2 = t'_1$ $\qquad x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1)$

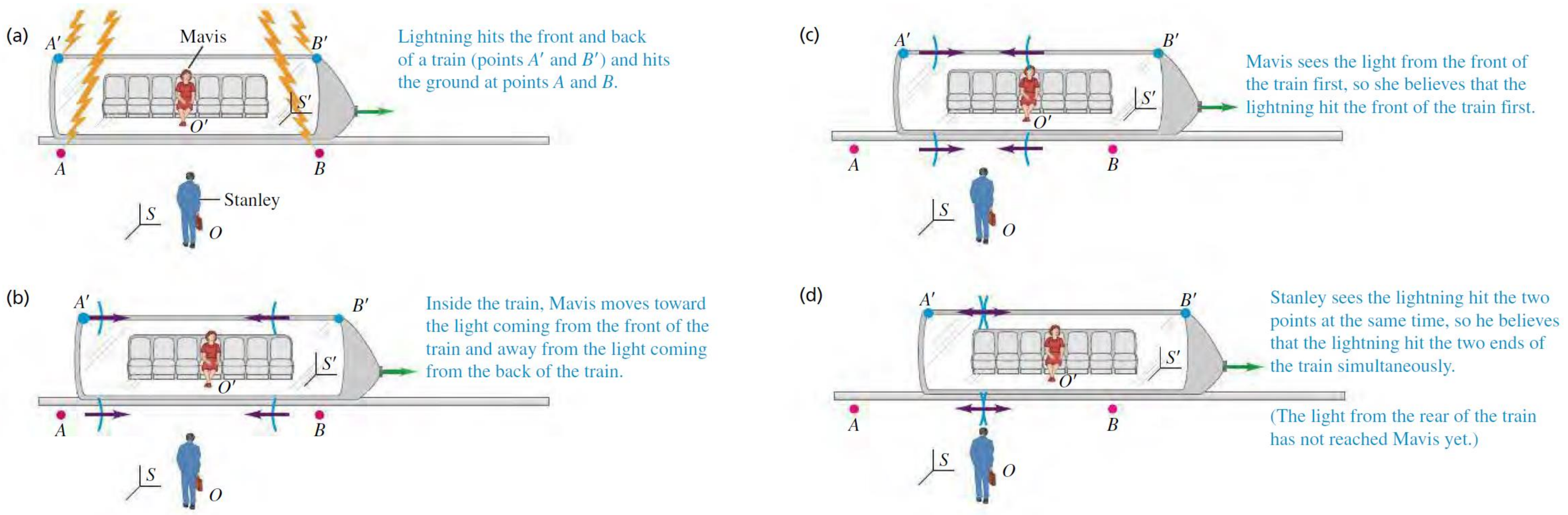
对比伽利略变换：

$$\begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = t' \\ x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1 \end{array}\right\} \text{变换不变量}$$

时间和空间耦合在一起
绝对的时间让位给绝对的速度
长度被重新定义

同时的相对性 － 物理描述



S: A′和B′同时被击中； S′： A′后被击中，B′先被击中 → 时间、空间关联

同时的相对性 – 数学描述

S 系　　**事件1**　(x_1, t_1)　　**事件2**　(x_2, t_2)

两事件同时发生　$t_1 = t_2$

S' 系　　**事件1**　(x'_1, t'_1)　　**事件2**　(x'_2, t'_2)

两事件先后发生　$t'_2 - t'_1 = ?$

$$t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{u}{c^2} x_1)$$

$$t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{u}{c^2} x_2)$$

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \frac{u}{c^2} (x_1 - x_2)$$

S 系　同地发生的两个同时事件

$x_1 = x_2$　　$t'_1 = t'_2$

S 系　异地发生的两个同时事件

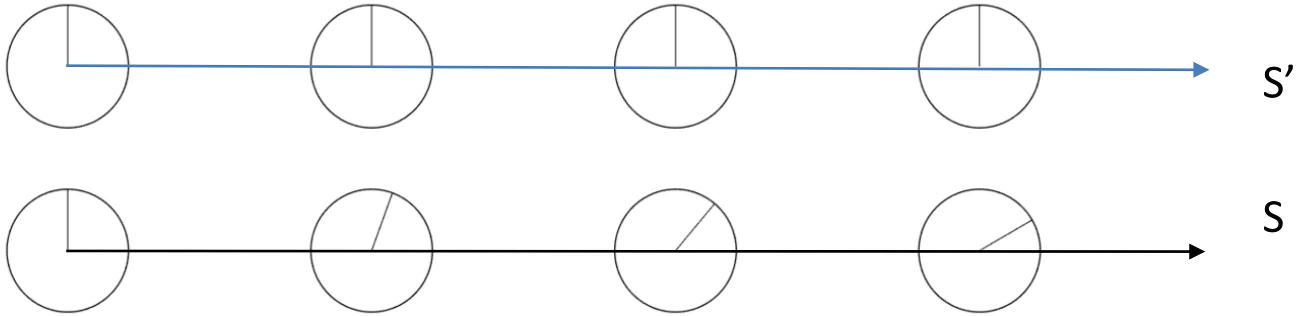
$x_1 > x_2 \Rightarrow t'_2 > t'_1$

$x_1 < x_2 \Rightarrow t'_2 < t'_1$

$$\beta \equiv \frac{u}{c} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

时钟序列

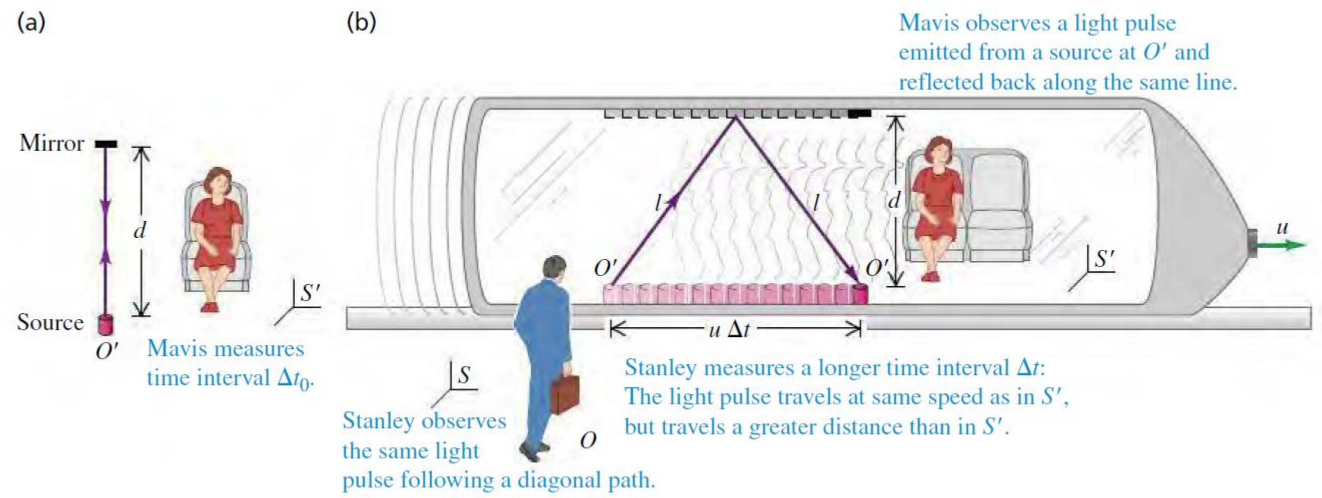
$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$



- S和S’参考系中，时钟同步不等效，不同位置事件之间的时间在两个参考系中不满足线性变换← 时空耦合。

- 同一参考系里，时钟的周期性仍然是等同的。

时钟变慢 – 物理描述



S′ : 光波一个来回，行程 2d

S：光波一个来回，行程$2\sqrt{d^2+(u\Delta t/2)^2}$

光速不变：

S′ : 光波一个来回，时间 Δt = 2d/c

S：光波一个来回，时间$\Delta t \; = 2\sqrt{d^2+(u\Delta t/2)^2}\,/c$

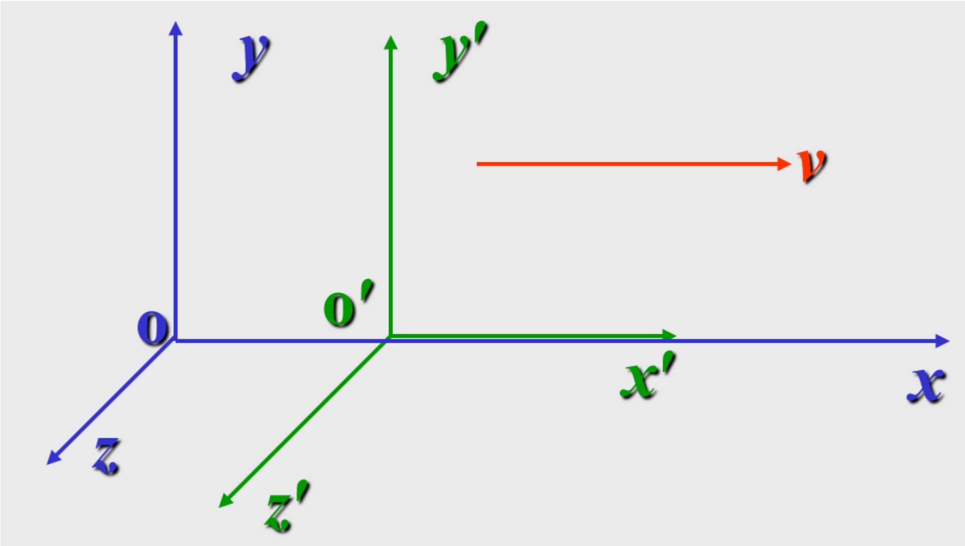
$$\Delta t \; = 2d/\sqrt{c^2-u^2}$$

观察同一个事件，在S′参考系（运动参考系）里，事件发生过程的时间短，$\Delta t_0 = \Delta t_1\sqrt{1-u^2/c^2}$。

但是：运动是相对的，如果这个时钟是在S参考系里，对事件的观察完全是镜像的！（即各自觉得对方时间变慢了）

时钟变慢 － 数学描述

两事件发生在S′系中的同一地点x'，时间分别为t_1'和t_2'。



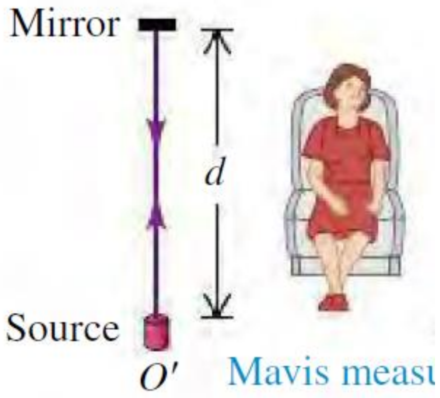
S系测得的时间： t_1和t_2

$$t_1 = \gamma(t'_1 + \frac{u}{c^2}x')$$

$$t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{u}{c^2}x')$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

固有时间(Proper time)：静态测量



Proper time between two events (measured in rest frame)

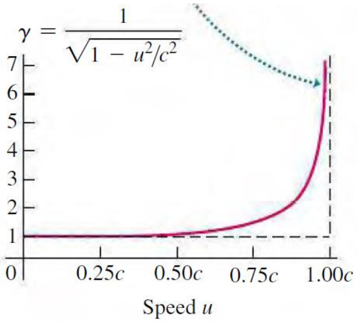
Time dilation: $$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Speed of light in vacuum

Speed of second frame relative to rest frame

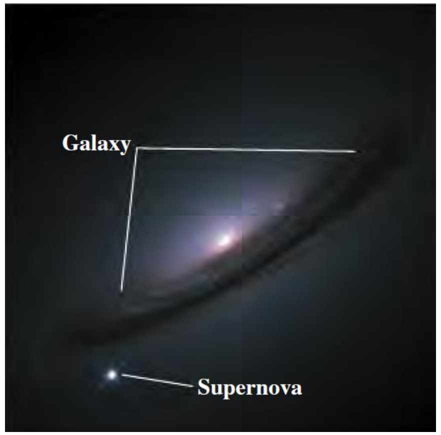
Time interval between same events measured in second frame of reference

Lorentz factor $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$



观察者观测任何和他相对运动的时钟都变慢。

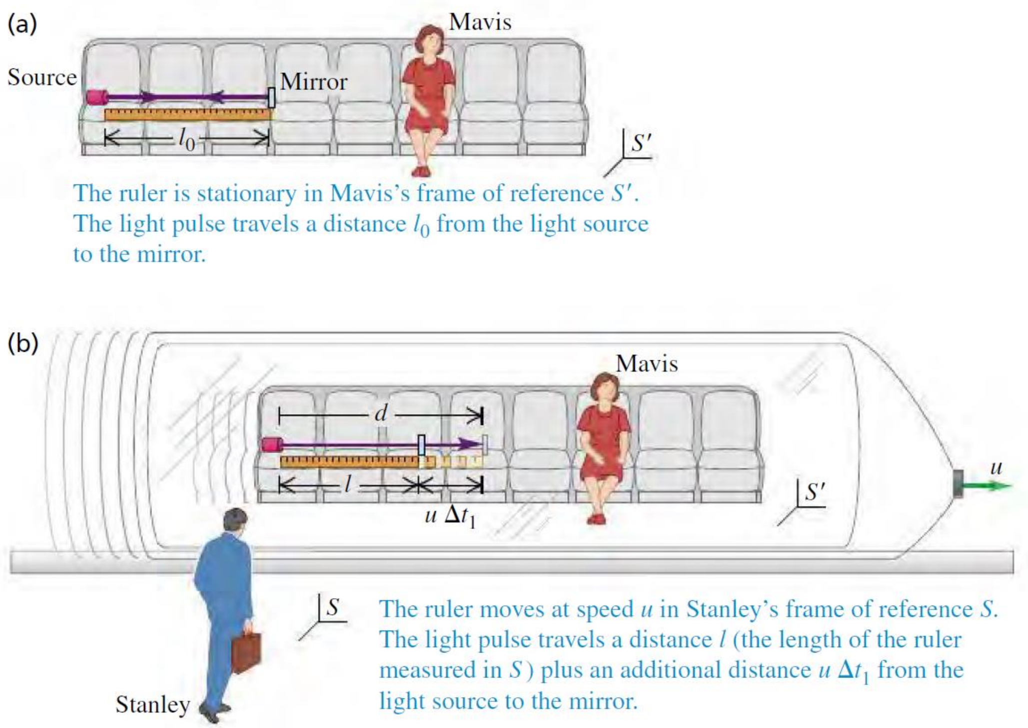
得到这个结果的标尺是光速不变 → 在任意一个惯性系物理规律不变 → 任何动钟都变慢。



固有时间：超新星参考系里，以正常速率衰减。
时钟变慢：地球参考系里，超新星寿命变长；远离速度越快，寿命越长。

尺子变短 - 物理描述

利用时钟变慢的结论，$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$，来导出长度的变化。
时钟变慢是在同一地点得到的→光（唯一的尺子）要回到起始点



S′参考系一个来回：$\Delta t_0 = \dfrac{2l_0}{c}$

S参考系：
$$\left.\begin{aligned} d &= l + u\,\Delta t_1 \\ d &= c\,\Delta t_1 \end{aligned}\right\} \quad \Delta t_1 = \frac{l}{c-u}$$

光回来用的时间 $\quad \Delta t_2 = \dfrac{l}{c+u}$

$$\Delta t = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{2l}{c(1-u^2/c^2)}$$

Length contraction:

Proper length of object (measured in rest frame)

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma}$$

Speed of second frame relative to rest frame

Lorentz factor relating the two frames

Length in second frame of reference moving parallel to object's length

Speed of light in vacuum

l_0: 固有长度（在相对静止系定义）
观察者观测任何和他相对运动的尺子都变短。

尺子变短 - 数学描述

在S′参考系中，尺子的长度由两个事件定义，两个事件发生的同一时间t'，位置分别为x_1'和x_2'。尺子的长度为$l_0 = x'_2 - x'_1$

在S参考系中，洛伦兹变换：

$$x_1 = \gamma(x'_1 + ut'_1) \qquad t_1 = \gamma\left(t'_1 + \frac{\beta}{c}x'_1\right)$$

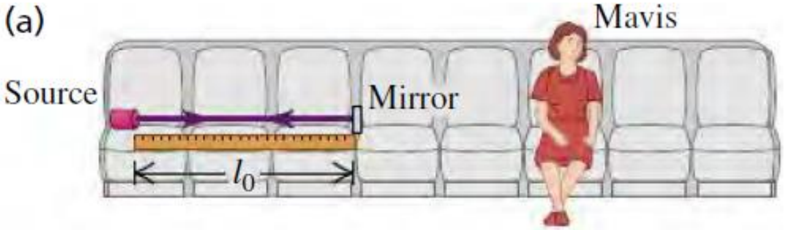
$$x_2 = \gamma(x'_2 + ut'_2) \qquad t_2 = \gamma\left(t'_2 + \frac{\beta}{c}x'_2\right)$$

S参考系中，两个事件不是同时发生的

长度的定义中要减去时间间隔内尺子运动的距离 $l = x_2 - x_1 - u(t_2 - t_1) = l_0/\gamma$

固有长度(Proper length)： 静态测量

Lorentz factor $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$



Length contraction: $$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma}$$

Proper length of object (measured in rest frame)

Speed of second frame relative to rest frame

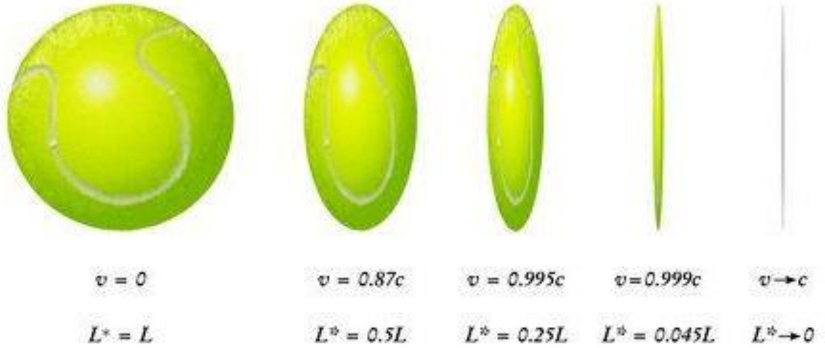
Lorentz factor relating the two frames

Length in second frame of reference moving parallel to object's length

Speed of light in vacuum

观察者观测任何和他相对运动的尺子都变短。

得到这个结果的标尺是光速不变 → 在任意一个惯性系物理规律不变 → 任何动尺都变短。



广义距离

事件1和事件2：

S参考系：　(x_1, t_1)　(x_2, t_2)

S'参考系：　(x'_1, t'_1)　(x'_2, t'_2)

洛伦兹变换：

$$x_1 = \gamma(x'_1 + ut'_1) \qquad t_1 = \gamma\left(t'_1 + \frac{\beta}{c}x'_1\right)$$

$$x_2 = \gamma(x'_2 + ut'_2) \qquad t_2 = \gamma\left(t'_2 + \frac{\beta}{c}x'_2\right)$$

广义距离:

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2$$

相对论世界观：

时空距离，$c^2(\Delta t)^2 - \{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\}$，变换不变。

{ct, x, y, z} – 四位时空矢量

低速极限

S 系 $\longrightarrow$ S' 系

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta}{c}x\right) \end{cases} \xrightarrow[\text{低速近似}]{u << c,\ \gamma \to 1} \begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

洛伦兹变换　　　　　　　　　　　　伽利略变换

基本概念小结

- 所有惯性系都是等价的；任何一个惯性系中，真空光速都恒为c。
- 以第一点为前提，惯性系间的四维坐标转换由洛伦兹变换来表达，洛伦兹变换的低速近似过渡到伽利略变换。
- 以第一点为前提，**物理的逻辑推演和洛伦兹变换的数学表达得到同样的结果**。相对论仍然是用我们掌握的逻辑对实际物理世界的描述，只是习惯低速状态的我们忽略了这些“看起来奇怪”的效应。
- 两个事件{x1, y1, z1, t1}和{x2, y2, z2, t2}，在任何一个惯性系中观察，四维坐标构建的$c^2(\Delta t)^2-\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\}$为不变量。

推论：

- 在S参考系中，一个静止的周期运动定义固有时间，当周期运动系统相对S动起来，在S参考系中，完成一个周期的时间变长。
- 在S参考系中，一个静止的有限尺子定义固有长度，当有限尺子相对S动起来，在S参考系中，在运动方向上尺子长度变短。
- 在S参考系中同时，或先→后发生的事件，在其它参考系中不一定同时，或先→后发生。

动钟变慢和动尺变短例题

宇宙射线进入大气层（距离地面约10km）时与大气微粒碰撞产生μ介子，其质量为$m_\mu=207m_e$，速度为$u=0.998c$。μ子在相对自身静止的惯性参考系中的平均寿命大约为2.15×10^{-6}s。试解释为什么在地平面也能检测到大量的μ子。

洛伦兹变换例题

在S’系中一光束沿与x'轴成θ_0角方向射出，求在S系中光束与x轴的夹角，设S’系相对S系以u沿x轴运动。

动钟变慢和动尺变短例题

宇宙射线进入大气层（距离地面约10km）时与大气微粒碰撞产生μ介子，其质量为$m_\mu=207m_e$，速度为$u=0.998c$。μ子在相对自身静止的惯性参考系中的平均寿命大约为2.15×10^{-6}s。试解释为什么在地平面也能检测到大量的μ子。

解: 已知μ子的平均寿命为$\tau=2.15\times10^{-6}$s，在此时间内可飞行的距离为 $s_0=u\tau\approx644\text{m}$ → 无法到达地面

考虑到运动时间的膨胀效应，在地面观测者看来，μ子的寿命为

$$\Delta t=\frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\approx3.4011\times10^{-5}\text{s}$$

$$\therefore s=u\Delta t\approx1.0176\times10^4\text{m}$$

可以到达地面!

从μ子参照系看:

$$l=10176\times\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=643\text{m}$$

$$s_0=u\tau\approx643\text{m}$$

洛伦兹变换例题

在S’系中一光束沿与x'轴成θ_0角方向射出，求在S系中光束与x轴的夹角，设S’系相对S系以u沿x轴运动。

设光在$t = t' = 0$时由原点射出，在t'时刻到达$P(x', y')$

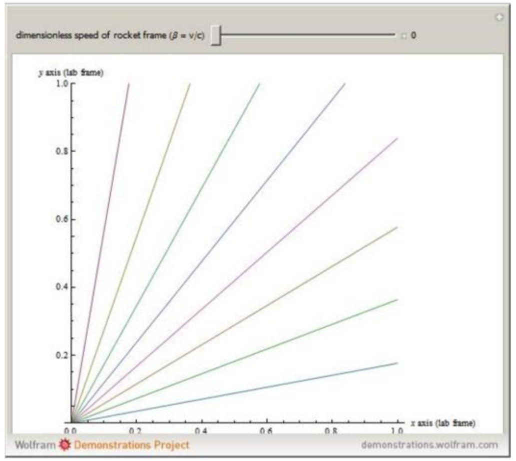
$x' = ct'\cos\theta_0$　$y' = ct'\sin\theta_0$　由洛伦兹变换

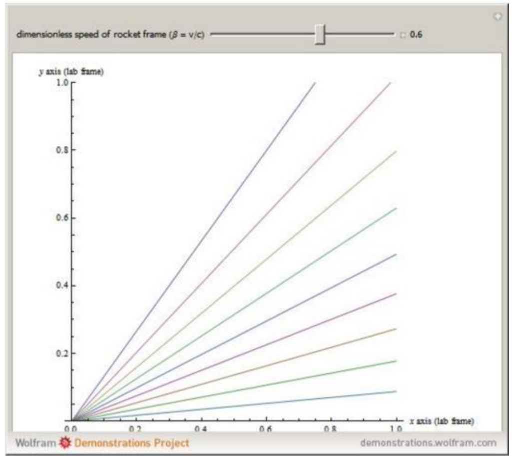
$$\cos\theta = \frac{\cos\theta_0 + \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}\cos\theta_0}$$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ct'\cos\theta_0 + ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad y = y' = ct'\sin\theta_0$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{ct'\sin\theta_0}{ct'\cos\theta_0 + ut'}\sqrt{1-\beta^2}$$

$$= \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0 + \frac{u}{c}}\sqrt{1-\beta^2}$$





光源在其静止的参照系中向各方向均匀辐射光线，当它以接近光速的速率运动时，它在前进方向上强烈地辐射。

因果律

S系　$P_1(x_1, t_1)$　$P_2(x_2, t_2)$　$t_2 > t_1$　S系中的因果律, P_1早于P_2发生

<u>*母亲出生时间地点v.s. 孩子出生时间地点*</u>

S'系　$P_1(x'_1, t'_1)$　$P_2(x'_2, t'_2)$

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)\right] = \gamma(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{u}{c^2}\frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}\right] = \gamma(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{uv}{c^2}\right]$$

$$v = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}$$

保持因果：参考系变化不影响事件发生的先后顺序

v是可以超过光速的

保持因果的条件：$uv < c^2$，也就是速度v不超过光速。

时空坐标和广义距离

- 事件(event)：世界点(world point)，时空坐标[t,x,y,z]
- 事件的轨迹：世界线(world line)
- 两个事件的时-空距离：间隔 (interval)

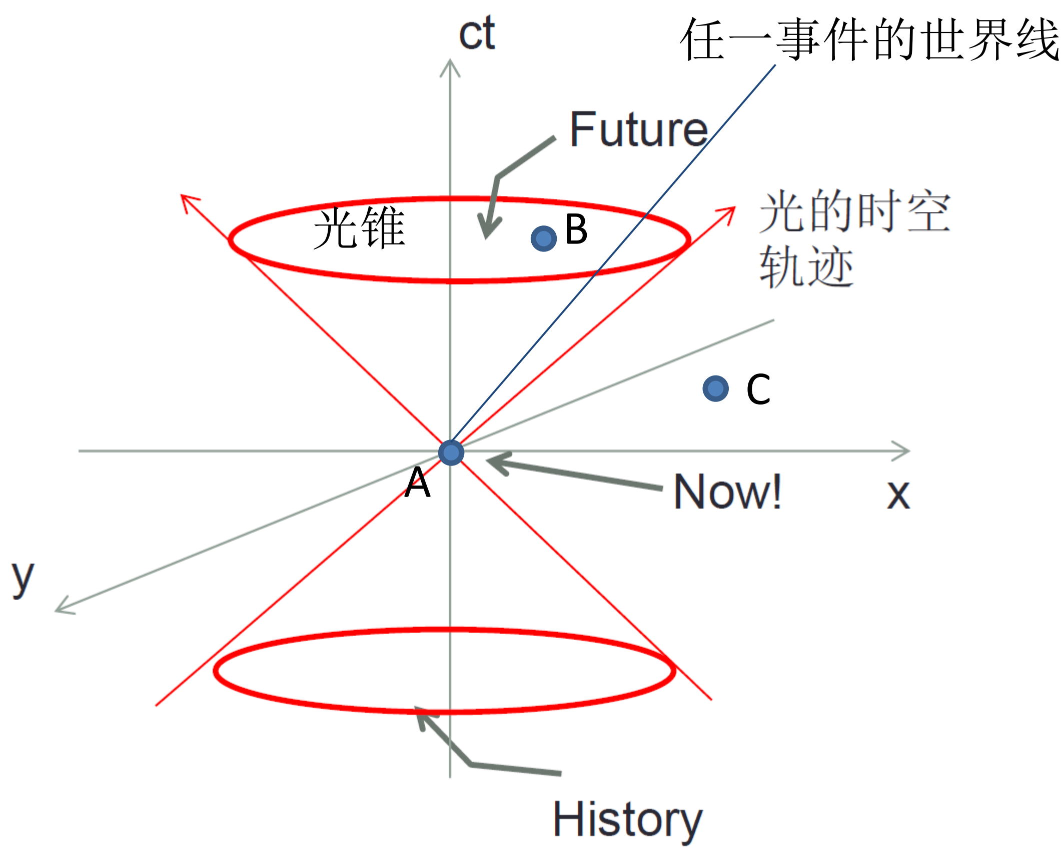
$s_{12}^2=c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2$

$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$

(Minkowski空间，一种具有非欧几何的赋范线性空间)

时空图：光锥

Minkowski时空下一束光随时间演化的轨迹



A事件：(0 0) – 此时此地

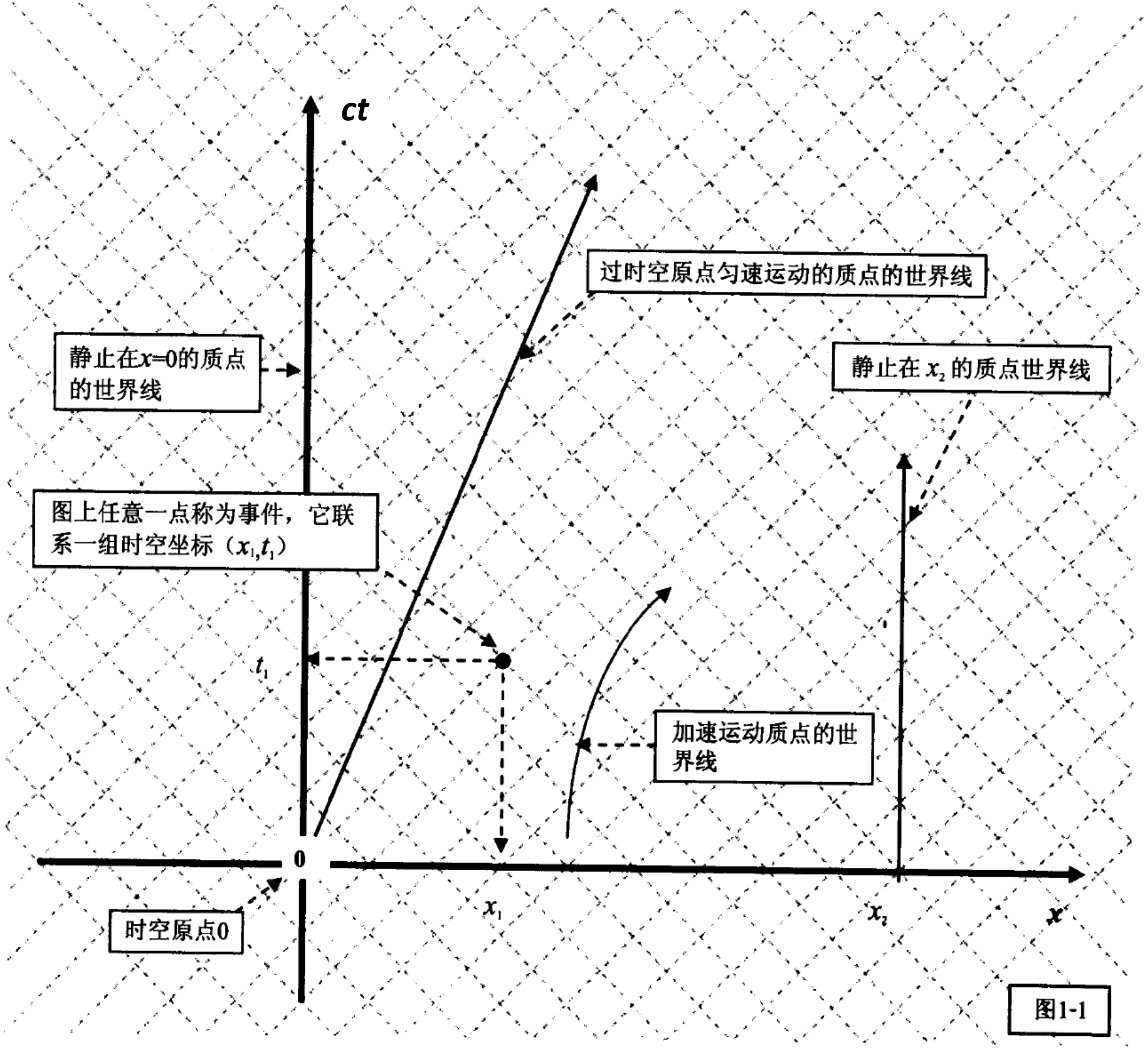
B事件：具有不大于光速就可以由A出发达到的将来

C事件：超光速才可以由A出发达到的将来
A和C不会有因果；B和C不会有因果

- ct^2+x^2 没有笛卡尔坐标系中x^2+y^2 = r^2的测量意义，所以这里的直角选择仅仅是为了表述的习惯性，没有固定意义。

S参考系时空图

是否直角并不重要，只是为了符合投影的习惯。



S参考系时空图

是否直角并不重要，只是为了符合投影的习惯。

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

ct’线：由S’参考系位置为x’=0的事件集合而成。
x’线：由S’参考系时间为t’=0的事件集合而成。

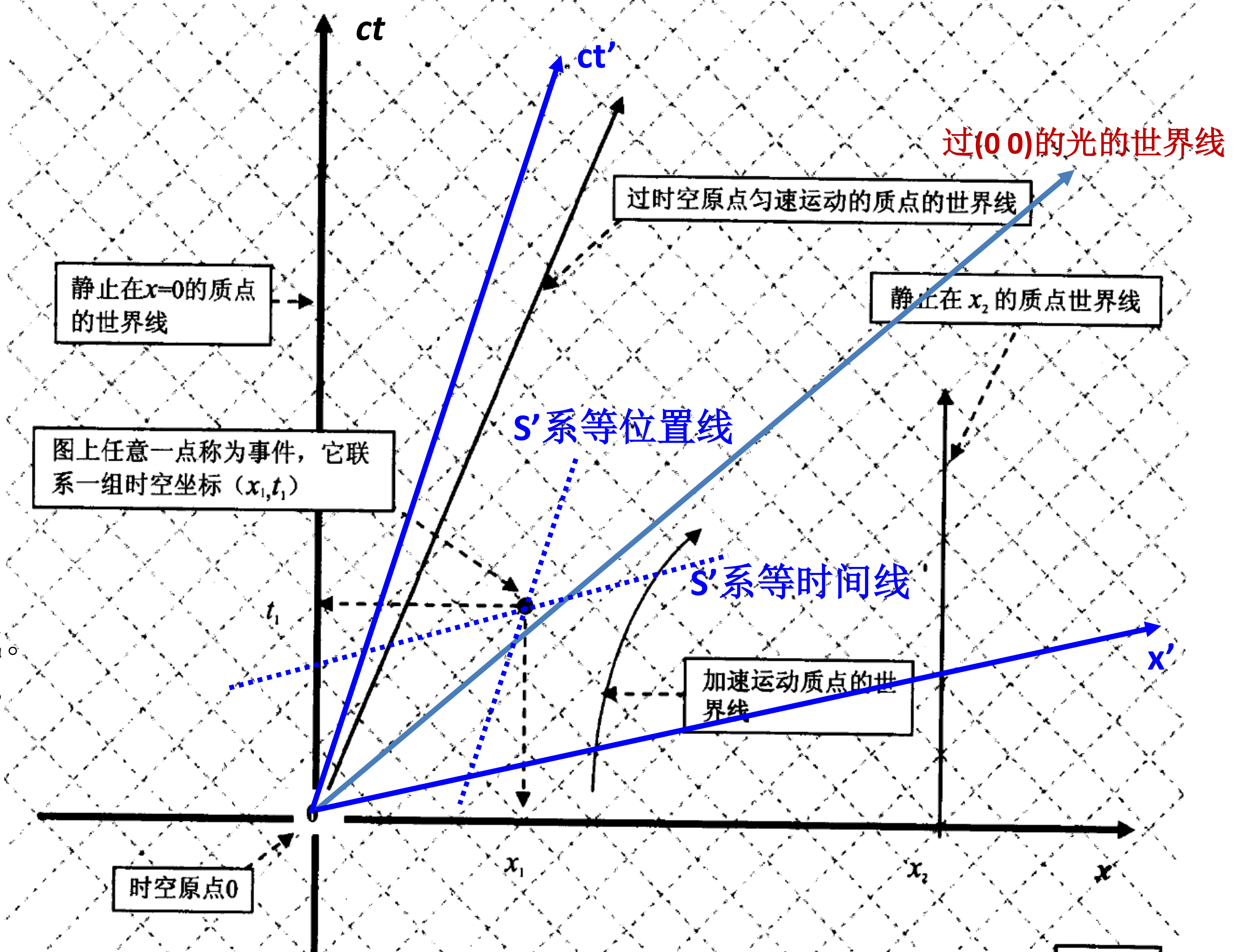


图1-1

S参考系时空图

原点重合的S和S′参考系：

$$x' = \gamma(x - ut)$$

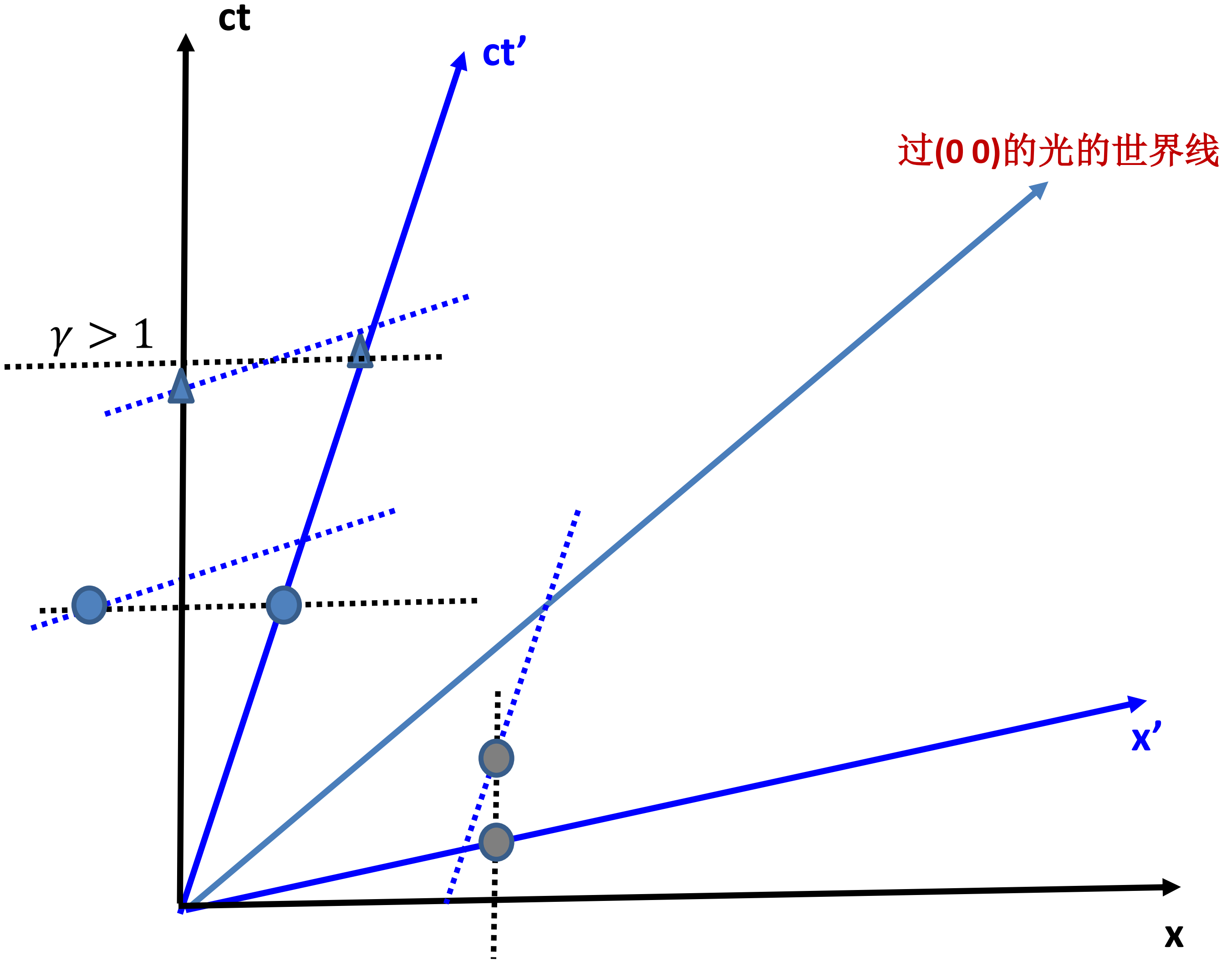
$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

ct′线：由S′参考系位置为0的事件集合而成。
x′线：由S′参考系时间为0的事件集合而成。

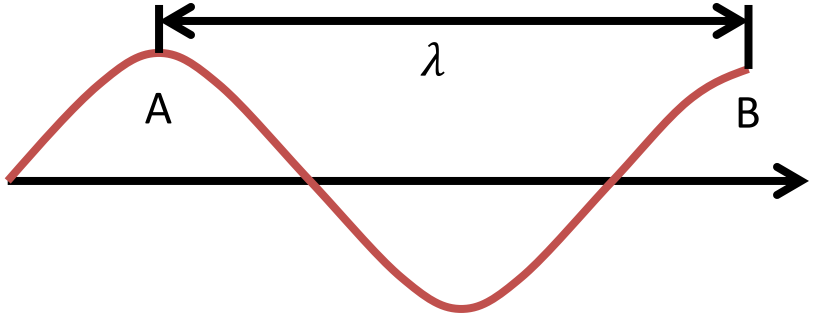
● 事件：在S系等时，在S′系不等时

● 事件：在S系等位，在S′系不等位

▲ 1秒计时：S′系1秒，S系等时线给出时间γ
S系1秒，S′系等时线给出时间γ



电磁波的多普勒效应



利用事件的洛伦兹变换：

S’参考系, t=0时刻：

事件A (0, 0) – 场强达到最大的一个点

事件B $(\lambda_0,$ 0) – 场强达到最大的下一个点

S参考系：事件A (0, 0)

事件B $\left(\gamma\lambda_0, \ \dfrac{\beta\gamma}{c}\lambda_0\right)$

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$

事件A的相位为0，事件B的相位$\omega t - kx = -2\pi$

$$c = \lambda f;\ \ \omega = 2\pi f;\ \ k = \frac{2\pi f}{c}$$

$$2\pi f\frac{\beta\gamma}{c}\lambda_0 - \frac{2\pi f}{c}\gamma\lambda_0 = -2\pi$$

$$f\gamma(1-\beta) = f_0$$

利用时钟变慢：

S’参考系：静止的光源发出一束光，$\lambda_0, c = \lambda_0 f_0$

$$f_0 = 1/T_0$$

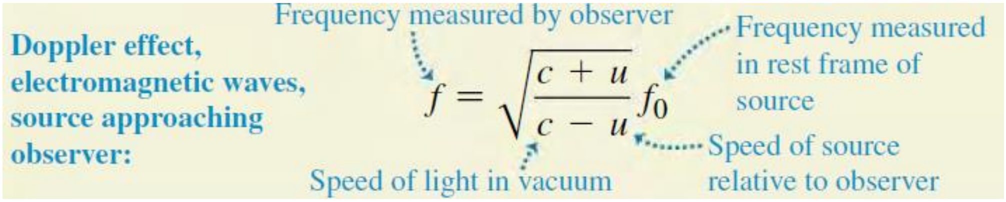
S参考系：$\lambda, f, c = \lambda f$

下一个波峰追赶上一个波峰：$\lambda = cT - uT$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c-u)T}$$

T的计时是在同一地点的测量的，时钟变慢

$T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \dfrac{cT_0}{\sqrt{c^2 - u^2}}$，将$T$换成$f$，得到



洛伦兹速度变换

伽利略变换 $\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x{}' = v_x - u \\ v_y{}' = v_y \\ v_z{}' = v_z \\ t' = t \end{cases}$

时间不变，速度简单相加

- 洛仑兹变换 $\begin{cases} x' = (x - ut)/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = (t - \frac{ux}{c^2})/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \end{cases}$

时间t'不再等于t，从而

$$\boxed{v_{y'} = \frac{dy\prime}{dt\prime} = \frac{dy}{dt\prime} \neq v_y}$$

x方向的速度也不再是简单的加减。

洛伦兹速度变换：

此处相对速度为v, u为在S系中运动速度

利用速度的定义：

速度变换：
$$
\begin{cases}
u'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \dfrac{v}{c^2}dx\right)} = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}, \\
u'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{\gamma\left(dt - \dfrac{v}{c^2}dx\right)} = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2}u_x\right)}, \\
u'_z = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{dz}{\gamma\left(dt - \dfrac{v}{c^2}dx\right)} = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2}u_x\right)}.
\end{cases}
$$

讨论：

1、低速运动($v<<c$)

洛伦兹变换 ⇒ 伽利略变换

2、洛伦兹变换满足光速不变原理

当 $u'_x = c$ 时 $\quad u_x = \dfrac{c+v}{1+\dfrac{v}{c}} = c$

3、速度变换后不能超越光速

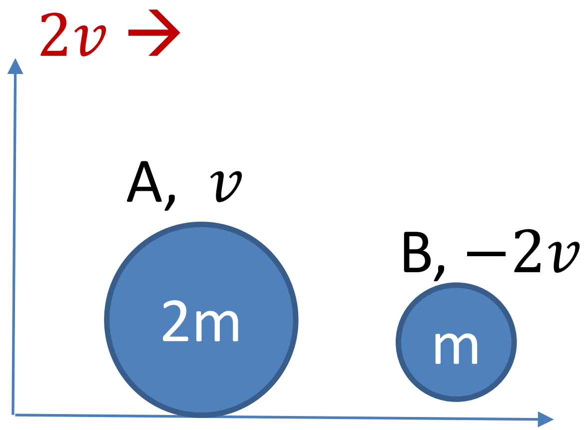
相对论动力学

我们之前讨论的一系列物理概念，在相对论中都面临着重新定义的问题。

1. 如果选择合适，可以使重要的物理定律（比如守恒定律）得以保持。
2. 在速度v<<c时，需要使定义的物理量趋向于经典的物理量。

我们从牛顿第二定律**F=dp/dt**出发，讨论需要对牛顿力学中的物理量进行怎样的修改。

相对论动量



S’参考系以$2v$速度匀速运动

在S’参考系中2m质量A球以v速度，m质量B球以-2v速度弹性碰撞

动量守恒　能量守恒

碰撞前：$u'_A = v$；$u'_B = -2v$
碰撞后：$u'_A = -v$；$u'_B = 2v$

利用速度变换公式：

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x},$$

得到在S参考系中的速度（注意相对速度是$-2v$）：

碰撞前：$u_A = 3v/(1+2\beta^2)$；$u_B = 0$

碰撞后：$u_A = v/(1-2\beta^2)$；$u_B = 4v/(1+4\beta^2)$

$$\frac{6mv}{1+2\beta^2} - \left(\frac{2mv}{1-2\beta^2} + \frac{4mv}{1+4\beta^2}\right) \neq 0\,!$$

前后动量不守恒 → 质量需要是相对的！

相对论质量

为保证了动量守恒定律在所有惯性系成立，质量需要重新定义

同一个惯性系里测量物体的质量，**运动质量**的大小取决于在这个参考系里的运动速度。

运动质量

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

静止质量

注意：我们这里为了表述方便，用m_0表示静止质量。

相对论性动量：

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{v}}$$

Sear's的书里用m表示静止质量。（课件中黄底的图片）

相对论动力学基本方程

相对论性动量：

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{v}}$$

相对论基本方程：

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}}$$

相对论动能：

$$K = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{s} = \int d\vec{p} \cdot \vec{v} = \int m_0 c^2 d\gamma$$

需要推几步

$$K = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2 \Longrightarrow$$

低速极限： $\frac{1}{2}mv^2$

质能关系

$$K = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

- 速度为0时，相对论动能为0。
- 等式左边是能量，右边有与速度无关的质量项 $m_0 c^2$ 。能量 $\leftrightarrow$ 质量

$E = K + m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 = mc^2$　在这个形式中，E是否有物理意义？

(E, cp_x, cp_y, cp_z):　$E^2 - c^2 p^2 = \gamma^2 (m_0^2 c^4 - m_0^2 c^2 v^2) = m_0^2 c^4$

$$\begin{cases} p'_x = \gamma(p_x - uE/c^2) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma(E - up_x) \end{cases}$$

完全类比于时-空$\{ct,\ \vec{r}\}$四矢量，$\{E, c\vec{p}\}$可以以同样的形式构建在所有惯性系里的不变量，同时，满足洛伦兹变换。

E是对物质能量更本征的表达，确定了质量和能量之间转换的关系。

能动量矢量

$$E^2 - c^2p^2 = \gamma^2(m_0^2c^4 - m_0^2c^2v^2) = m_0^2c^4$$

$$\begin{cases} p_x' = \gamma(p_x - uE/c^2) \\ p_y' = p_y \\ p_z' = p_z \\ E' = \gamma(E - up_x) \end{cases}$$

- 任意一个惯性系内，无外力做功，体系的E守恒。
- 任意一个惯性系内，无外力冲量，体系$\vec{p}$的守恒。
- 在惯性系之间转换时，$\{E, c\vec{p}\}$满足洛伦兹变换关系。
- 在惯性系之间转换时，$\{E, c\vec{p}\}$四矢量可以构建不变量。

核反应中的质能关系

在能量较高的情况下，微观粒子（如原子核、基本粒子）相互作用时导致分裂、聚合、重新组合等反应过程。以一个不稳定的原子核裂变为例，假定质量为 M 的母核分裂为一系列质量为 $m_i(i=1,2,\cdots)$ 的碎片。在母核静止的参考系内看，碎片朝四面八方飞散，各获得一定的速度 $\boldsymbol{v}_i$ 和动能 $E_{ki}=[m_i(v_i)-m_{i0}]c^2$，碎片获得的总动能为

$$E_k=\sum_i E_{ki}=\sum_i m_i(v_i)c^2-\sum_i m_{i0}c^2.$$

由于反应前后能量守恒

$$M_0c^2=\sum_i m_i(v_i)c^2 \Longrightarrow M_0=\sum_i m_i(v_i),$$

故有

$$E_k=\left(M_0-\sum_i m_{i0}\right)c^2.$$

动能的获得是以损失静态质量为代价。

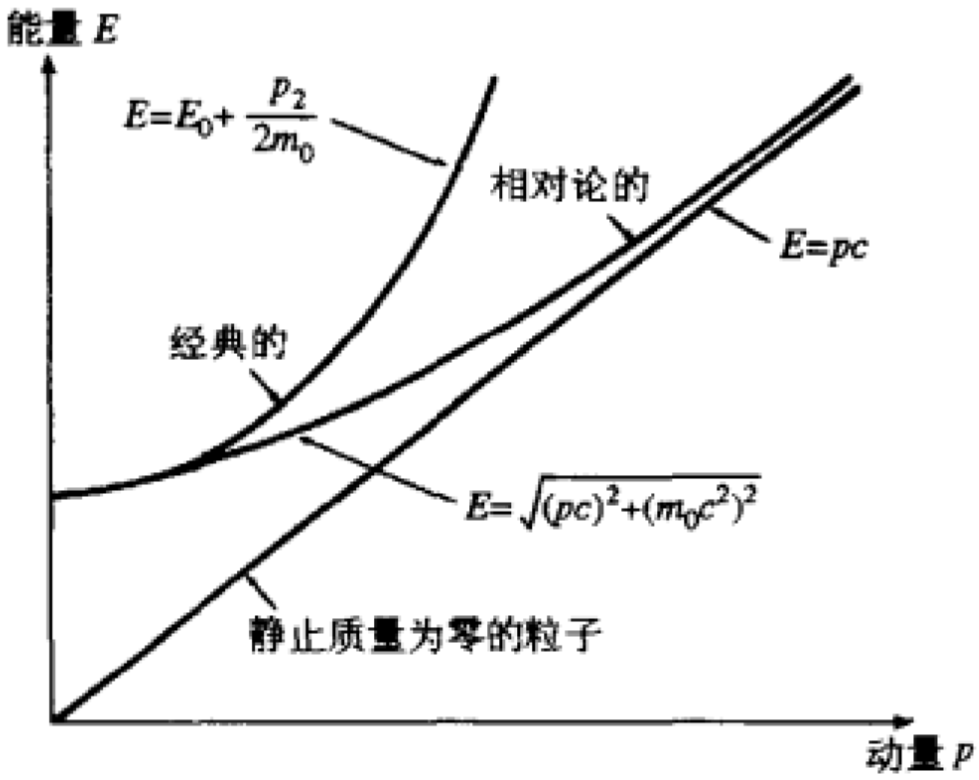
光子：无质量粒子

$$\boxed{E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2}$$

光子无质量：$m_0 = 0$

光子能量：$\boxed{E = pc}$

光子动量：$\boxed{p = \frac{E}{c}}$



狭义相对论总结

惯性系之间洛伦兹变换四矢量

时-空距离：对两个事件相对性的描述

$c^2(\Delta t)^2-\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\}$ 变换不变

在(0 0 0 0)零点重合的惯性系之间：

$$\begin{cases} x' = \gamma(x-ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - u\dfrac{x}{c^2}\right) \end{cases}$$

S参考系位置原点放置时钟记录固有时间t_0:

$$c^2t^2 - r^2 = c^2{t_0}^2$$

能-动量：对一个对象自身性质的描述

$E^2 - c^2\{{p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2\}$ 变换不变

在惯性系之间：

$$\begin{cases} p'_x = \gamma\left(p_x - u\dfrac{E}{c^2}\right) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma(E - up_x) \end{cases}$$

S参考系固定位置(速度为0)记录静态质量m_0:

$$E^2 - c^2p^2 = m_0c^2$$

相对论运动学：

$$m = \gamma m_0$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$E = mc^2$$

能量，动量在同一惯性参考系守恒；在不同惯性系间满足能-动量四矢变换。

双生子佯谬

好了，没了