机械波

波动-振动状态的传递

波动是振动的传播。

常见的波有：机械波，电磁波，…

常见，应用广泛

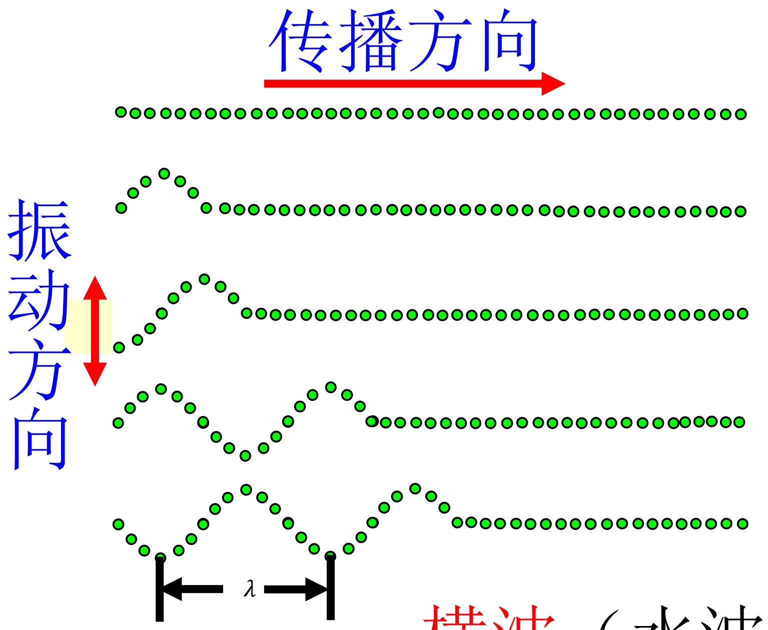
机械振动在连续介质内的传播形成机械波

机械波产生的两个条件：波源，媒质

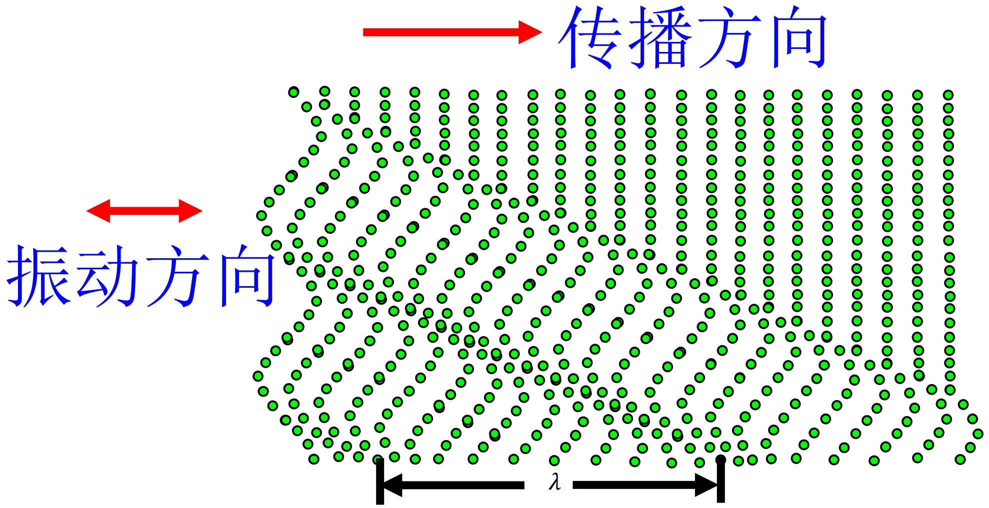
机械波的分类：振动与传播方向

横波：质元振动方向与波的传播方向垂直

纵波：质元振动方向与波的传播方向平行



横波（水波）

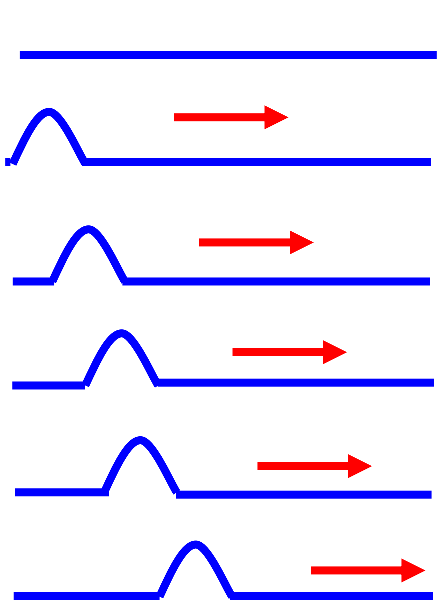


纵波（声波）

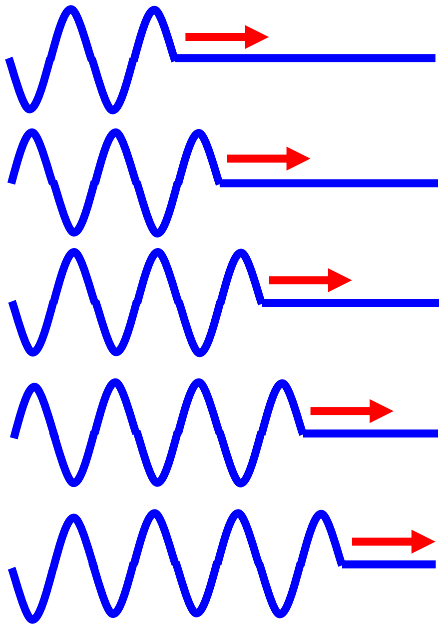
https://www.youtube.com/watch?v=ewsx9Gnh5eM

机械波的分类：传播形式

行波

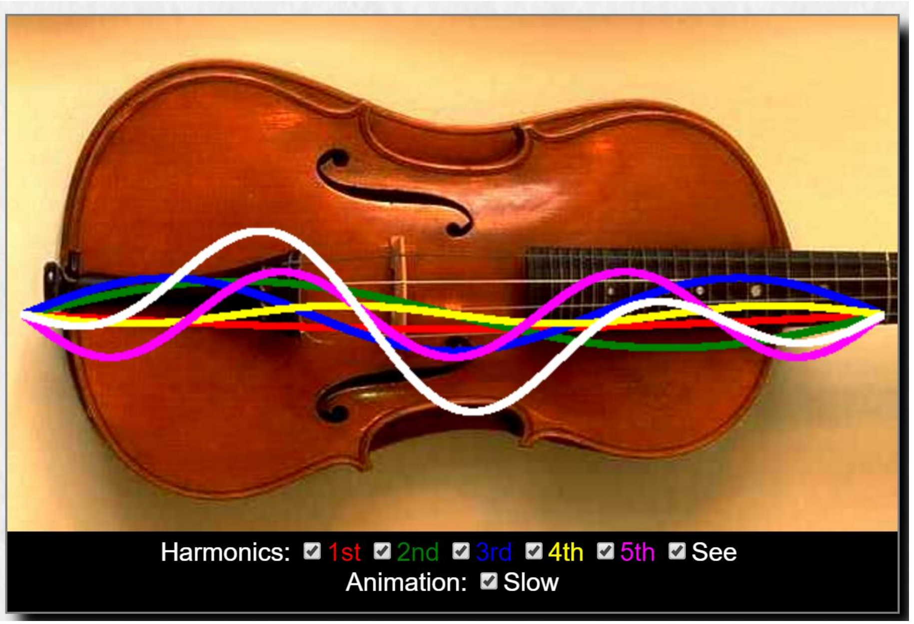


脉冲波

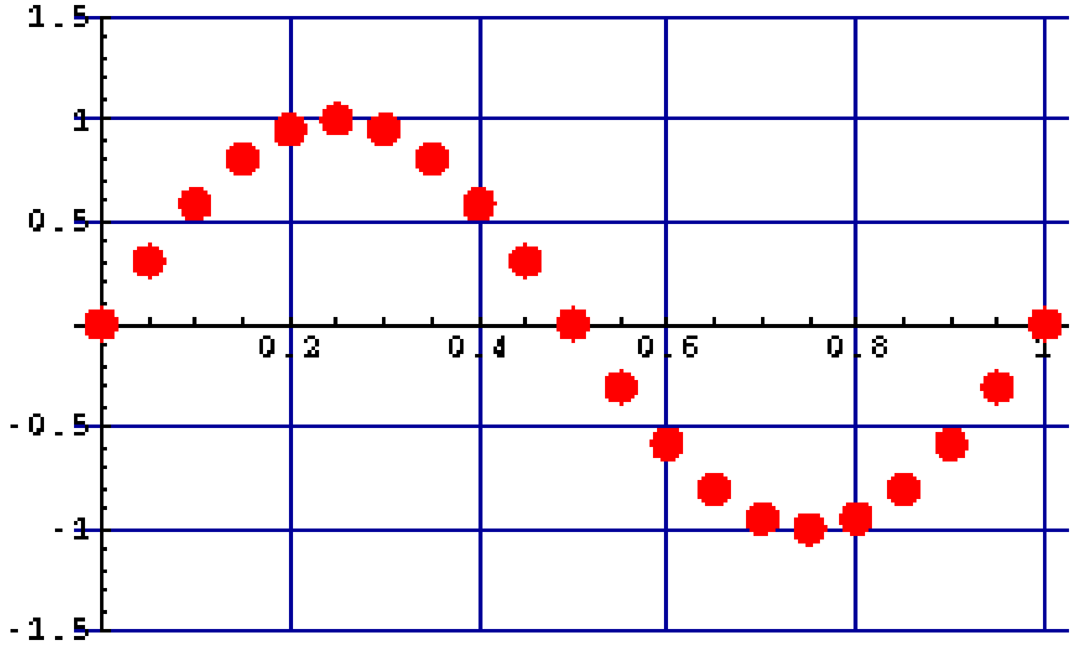


连续波

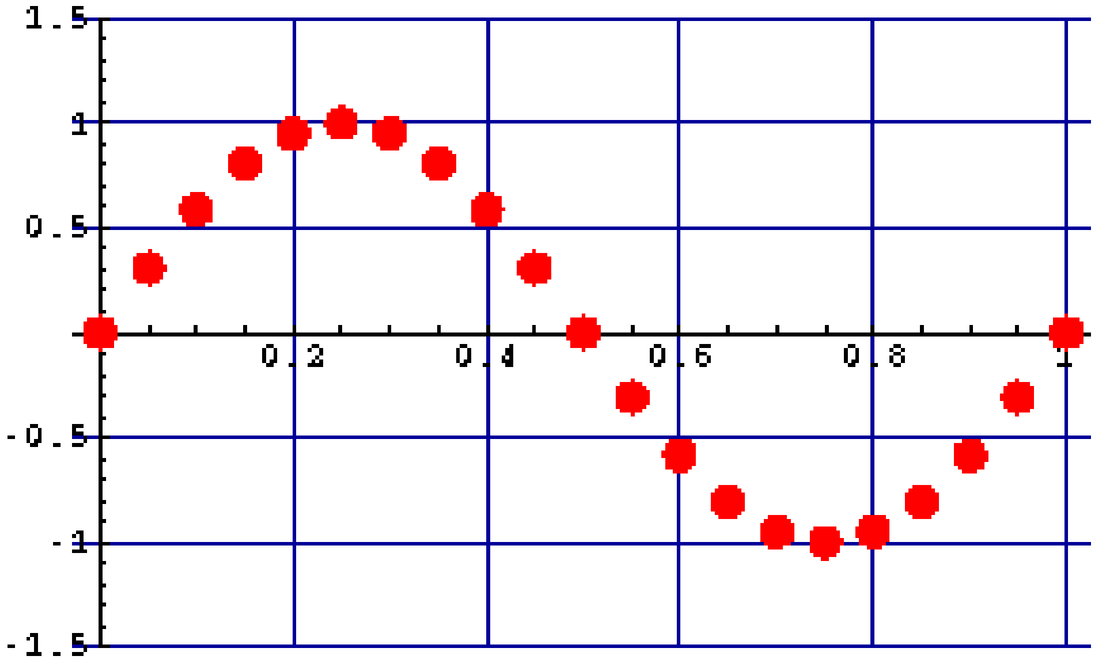
驻波



机械波的分类：传播形式



行波



驻波

机械波的分类：波前形状

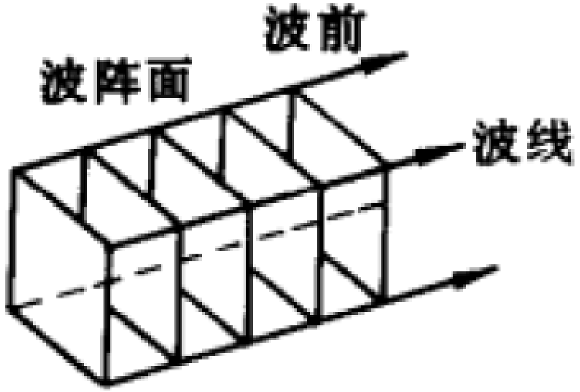
波线： 用有向直线表示波的传播方向

波阵面：某一时刻波的前方达到的相位相同的各点构成的连续的面，又称波前 (wave front)

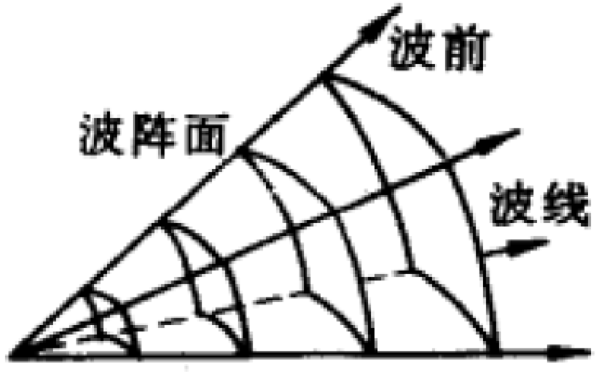
各向同性介质中，波线与波阵面垂直

- 若波阵面为平面，称为平面波
- 若波阵面为球面，称为球面波
- 若波阵面为柱面，称为柱面波

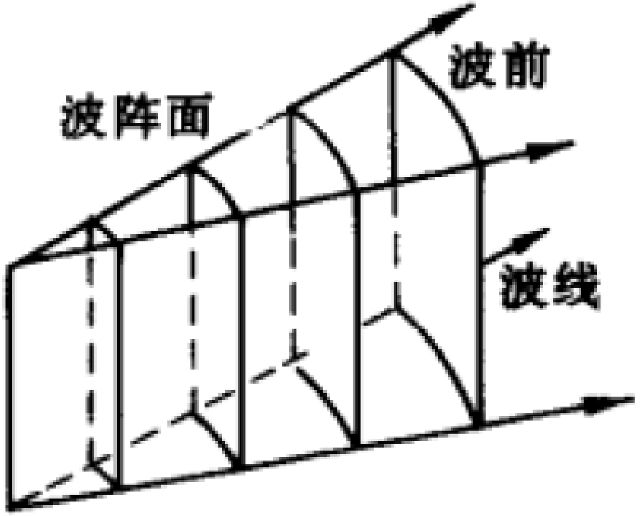
机械波的分类：波前形状



平面波



球面波



柱面波

波速u：波阵面沿波线的推进速度（相位传播）

$$t,\Psi \xrightarrow[\Delta S]{} t+\Delta t,\Psi$$

$$u=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

机械波的速度决定于媒质的弹性和密度

平面简谐波

一维平面行波的数学描述

设平面波沿 x 轴正向传播，质元沿 y 轴振动

设坐标原点的质元振动 $y_o = f(t)$

则 t 时刻 x 处质元振动 $y = f(t - \frac{x}{u})$

此式为沿 x 轴正向传播平面波波动方程。注意其同时为空间坐标x与时间坐标t的函数。

则沿 x 轴负向传播平面波波动方程为： $y = f(t + \frac{x}{u})$

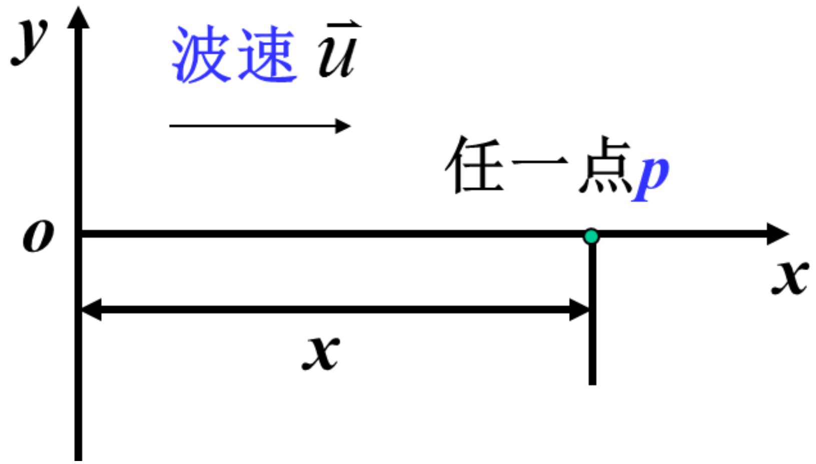
平面简谐波

简谐波：波源作简谐振动，在波传到的区域，媒质中的质元均作简谐振动。

设 $y_o = A\cos(\omega t + \phi)$

假设：媒质无吸收(质元振幅均为A)

图中p点比o点落后时间：$\dfrac{x}{u}$



$p:\ t \Leftrightarrow o:\ t - \dfrac{x}{u}$ 则 $\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t - \dfrac{x}{u}\right) + \phi\right]}$

向右传播的一维平面简谐波

平面简谐波

$$\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi\right]}$$

对t微分 $\ddot{y} = -\omega^2 A cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] = -\omega^2 y$ 每一点都在做简谐振动

对x微分 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{u^2} A cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] = -\frac{\omega^2}{u^2} y$

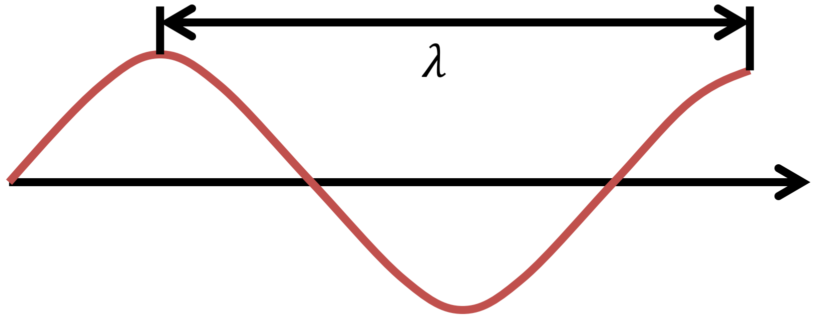
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\ddot{y}$$

描述简谐波的物理量

1. 相速度

等相位面沿波线向前推进的速度，即波速(单位时间波所传过的距离)。

2. 波长



波长：两相邻同相点间的距离

周期*T*：波前进一个波长的距离所需的时间。

波数： $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ 即单位长度上波的相位变化

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

频率、波长和波速三者关系：$\nu=\dfrac{u}{\lambda}$ 或 $\lambda=uT$

波动式的其他表达式

$$y = A\cos\left[2\pi f(t \mp \frac{x}{u}) + \phi\right] \qquad (\omega = 2\pi f)$$

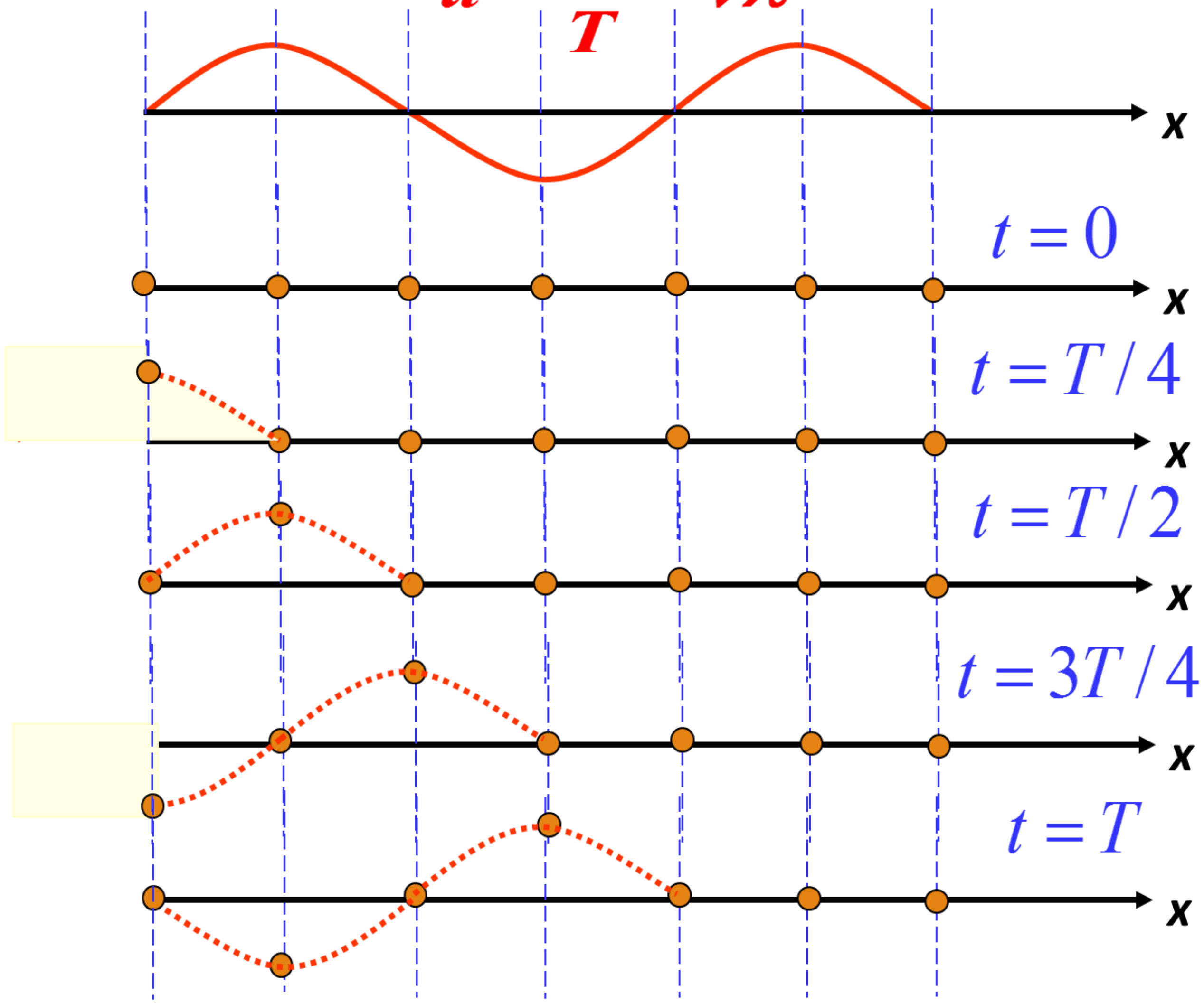
$$= A\cos\left[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \phi\right] \qquad (f = \frac{1}{T}, \lambda = uT)$$

$$= A\cos[k(ut \mp x) + \phi] \qquad (k = \frac{2\pi}{\lambda}, u = \frac{\lambda}{T})$$

$$= A\cos[\omega t \mp kx + \phi] \qquad (ku = \frac{2\pi}{T})$$

简谐波表达式的图像

$$u = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda$$



一维简谐波表达式的物理意义

由 $y(x,t)=A\cos(\omega t-kx)$ 从几方面讨论

a. 固定 *x*， (*x*= *x*$_0$) $y(x_0,t)=A\cos(\omega t-kx_0)$

b. 固定 *t*， (*t* = *t*$_0$) $y(x,t_0)=A\cos(\omega t_0-kx)$

c. 如认定某一相位，即令 (ω *t*-*kx*)=常数

相速度为： $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{k}=u$$

d. 表达式也反映了波是振动状态的传播

$y(x+\Delta x,t+\Delta t)=y(x,t)$ 其中$\Delta x=u\Delta t$

一维简谐波表达式的物理意义

e. 表达式还反映了波的时间、空间双重周期性

T 时间周期性　　　　λ 空间周期性

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

➢注：相位差和波程差的关系

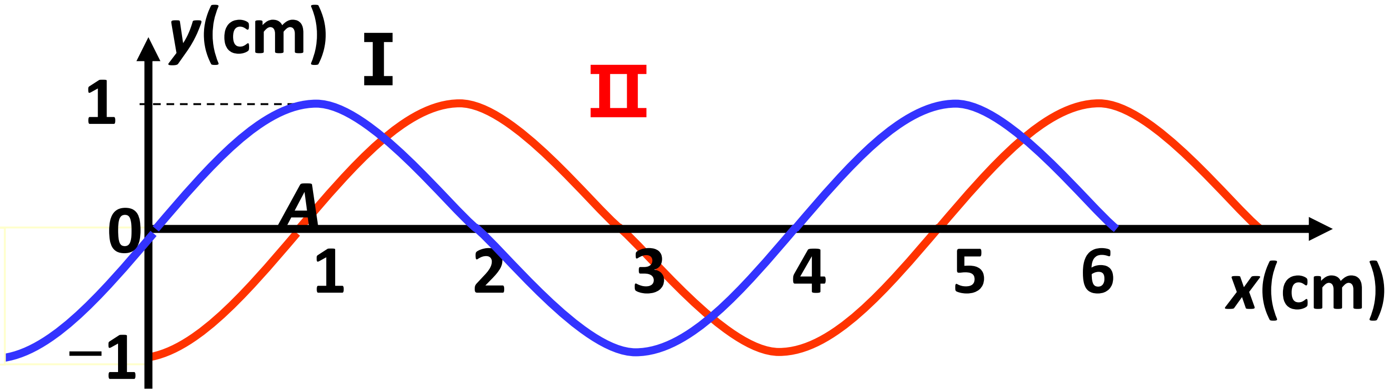
$$\boxed{\Delta\phi = \pm 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}}$$

例题

已知 *t*=0时的波形曲线为Ⅰ，波沿*ox*方向传播，经*t*=1/2s后波形变为曲线Ⅱ。已知波的周期*T*>1s，试根据图中绘出的条件求出波的表达式，并求*A*点的振动式。

解： $A = 0.01\mathrm{m}$

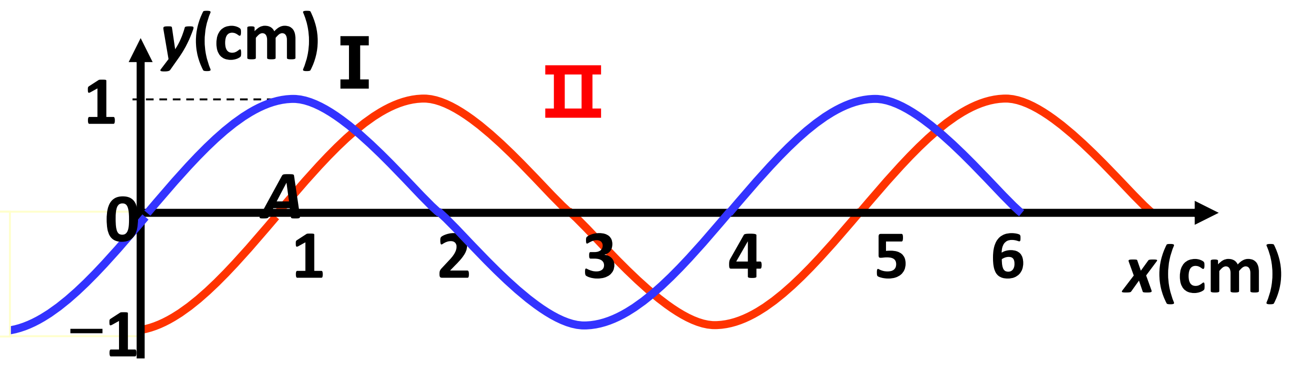
$\lambda = 0.04\mathrm{m}$



波速：

$$u = \frac{x_1 - x_0}{t} = \frac{0.01}{1/2} = 0.02\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \qquad T = \frac{\lambda}{u} = \frac{0.04}{0.02} = 2\mathrm{s} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\mathrm{s}^{-1}$$

例题



原点振动： $y_0 = A\cos(\omega t + \phi)$

初始条件： $0 = A\cos\phi$

$\rightarrow \phi = \pm\frac{\pi}{2}$

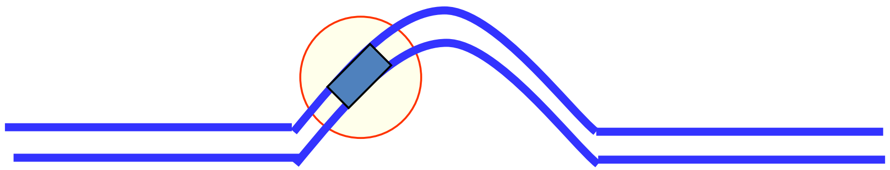
原点振动速度 $v = -\omega A\sin\phi < 0$ $\sin\phi > 0$ $\rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$

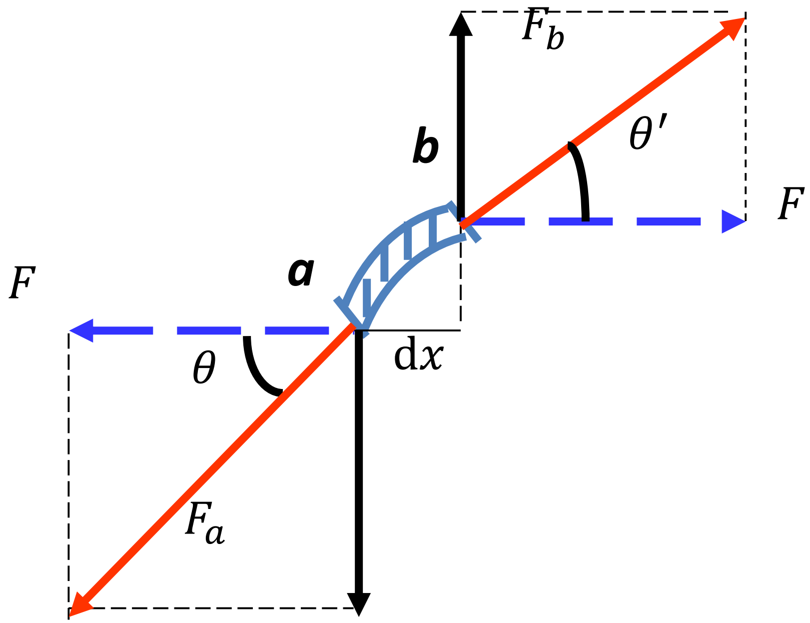
原点的振动式 $y_0 = 0.01\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

平面波的波动方程-弦上横波

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

推导：以弦上的横波为例，设线密度μ，张力F（不变）





平面波的波动方程推导-弦上横波

根据这一小段绳受的合外力：

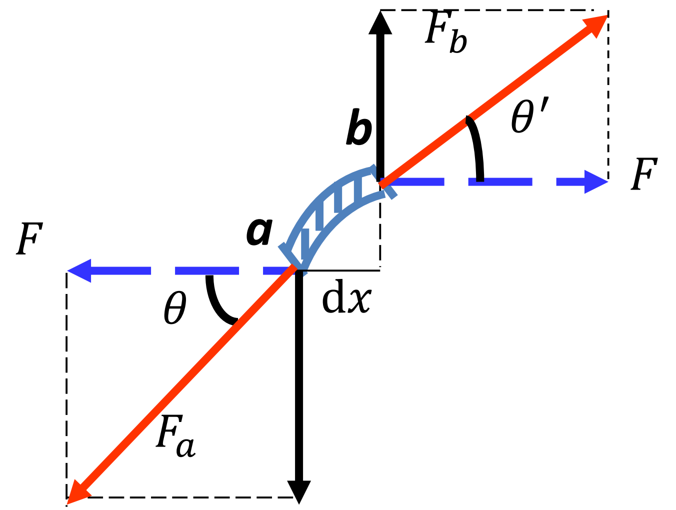
$$F_b \sin\theta' - F_a \sin\theta = \frac{F}{\cos\theta'}\sin\theta' - \frac{F}{\cos\theta}\sin\theta$$

$$= F(\tan\theta' - \tan\theta) = F\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right)$$

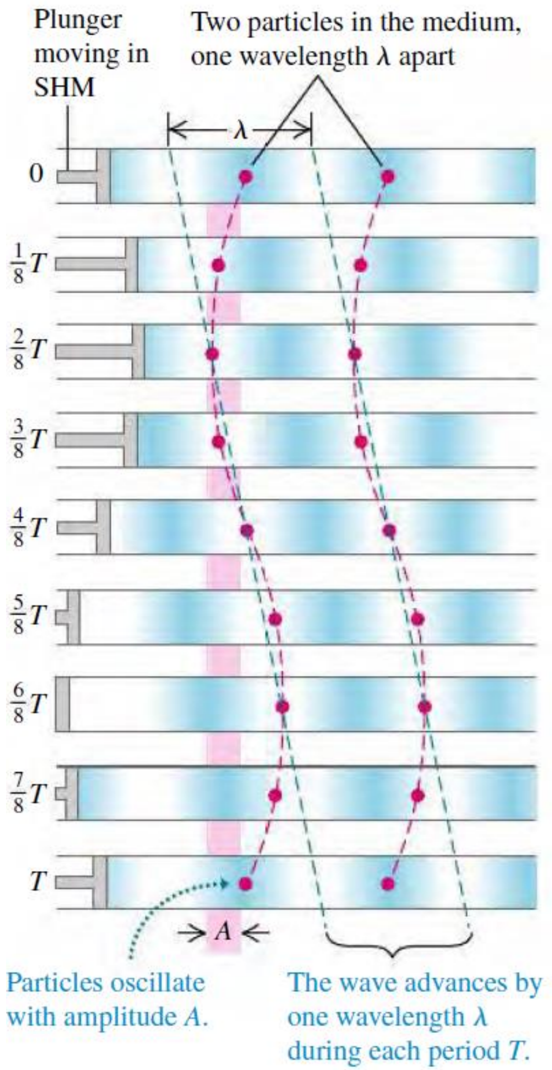
牛顿定律： $= \underbrace{\mu\mathrm{d}x}_{m}\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}_{a}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

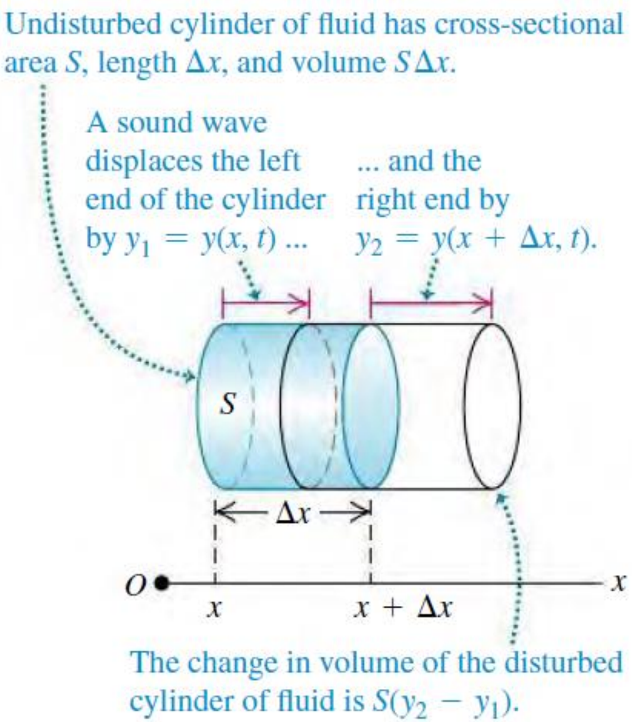


平面波的波动方程-声波



声波： 纵波 – 传播方向和振荡方向同向。

考虑对象： y(x, t) – 任意位置小元相对于平衡位置的位移，方向$\hat{x}$



$$\Delta V = S(y_2 - y_1) = S[y(x + \Delta x, t) - y(x, t)]$$

如果y1 = y2, 整体没有变化 → 没有能量变化，没有传播

$$\frac{dV}{V} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S[y(x + \Delta x, t) - y(x, t)]}{S\,\Delta x} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

平面波的波动方程推导-声波

$$\frac{dV}{V} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S[y(x+\Delta x, t) - y(x,t)]}{S\,\Delta x} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

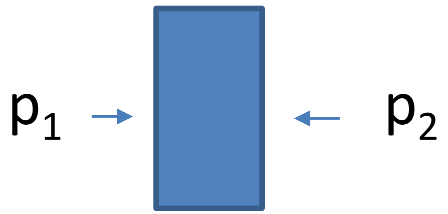
PV = constant -- 理想气体

p: 传播状态的压强偏移

P: 平衡状态的压强

$$\frac{-p(x,t)}{P} = \frac{dV}{V}$$

$(Y = \frac{F/A}{dl/l})$，P与Y地位相同



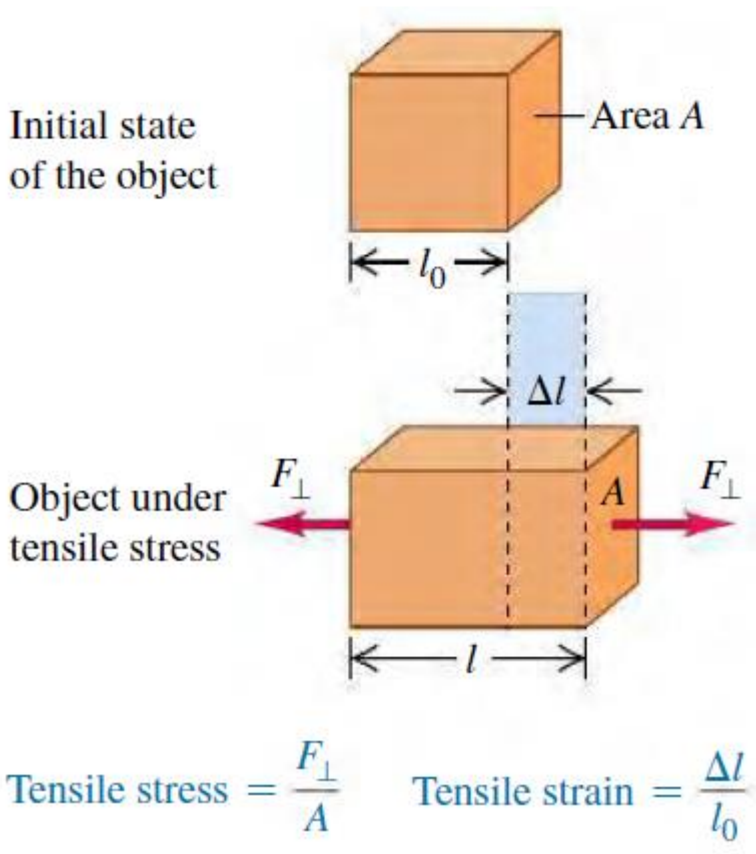
$$\left.\begin{aligned} \Delta pS = F = ma = \rho S dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \Delta p = -P\frac{\partial y}{\partial x}|_1 - (-P\frac{\partial y}{\partial x}|_2) \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

注意压力的方向

$$u = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \to \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- 波动频率不出现 → 通常情况下，声速和振动频率无关。
- 对于气体来说，压强和密度是相关的，比例转化为温度。

tensile and Compressive stress and strain



$$\text{Tensile stress} = \frac{F_\perp}{A}$$

$$1 \text{ pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

人站在地面上：65Kg*9.8N/Kg/(8X24X2 cm^2) = 1.7e4 N/m^2

$$\text{Tensile strain} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

1m的刚性材料 – 一般“常规受力”弹性形变在 十微米 (e-5m)量级

机械波的速度

1. 绳或弦上的横波波速 $u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ F 张力，μ 线密度

2. 细棒中的纵波波速 $u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ E 杨氏模量，ρ 密度

$$v=\sqrt{\frac{\text{Restoring force returning the system to equilibrium}}{\text{Inertia resisting the return to equilibrium}}}$$

平面波的波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

平面波的波动方程

一维平面简谐波波动式是它的解。

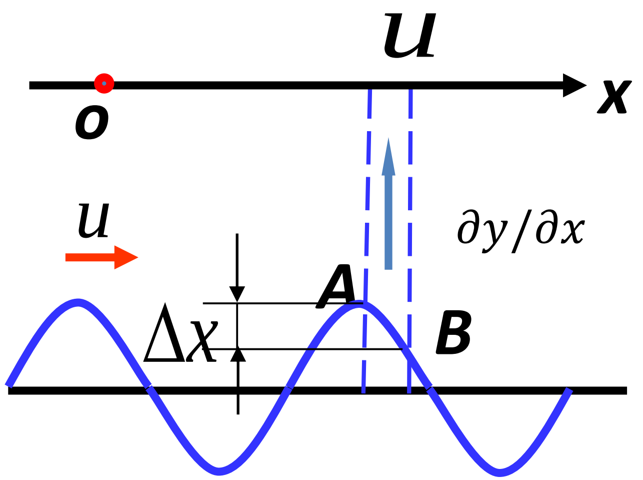
$$y = A\cos(\omega t - kx)$$

时间、空间的耦合解；推广来说，这是所有一维传播波的基本解形式。

- 机械波
- 电磁波
- 自由电子
- 。。。

机械波的能量分布

设 $y = A\cos(\omega t - kx)$



$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\mu\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$ 一小段弦内的动能

势能 $$\Delta x \to [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{1}{2}} = \Delta x\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$ 一小段弦的伸长幅度 – 微小形变

$$\Delta E_\mathrm{p} = F\left\{\Delta x\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \Delta x\right\} \approx \frac{1}{2}F\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

机械波的能量分布和变化

$$y = A\cos(\omega t - kx)$$

$$\boxed{\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\mu\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

对于平面简谐波

$$\boxed{\Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\mu\Delta x\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)}$$

$$\boxed{\Delta E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}F\Delta x k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)}$$

$$\because u = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \therefore \Delta E_{\mathrm{k}} = \Delta E_{\mathrm{p}}$$

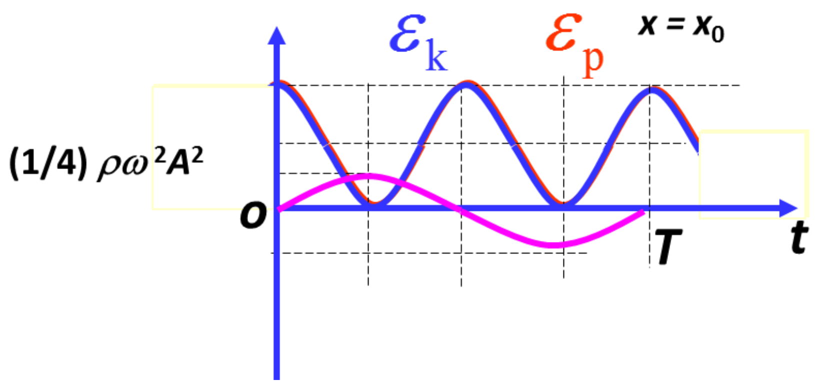
$$\boxed{\Delta E = \mu\Delta x\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)}$$

能量分布的物理意义

(1) 固定x

ε_k ,ε_p均随 t 周期性变化

$$\varepsilon_\mathrm{k}=\varepsilon_\mathrm{p}$$

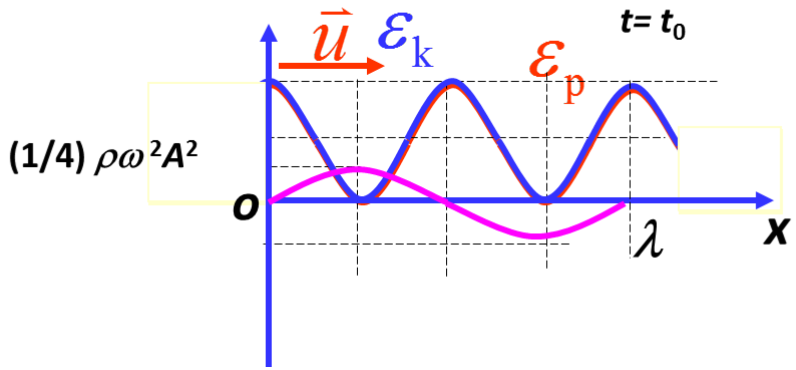


(2) 固定t

ε_k, ε_p 随x周期分布

y=0 $\rightarrow \varepsilon_k, \varepsilon_p$最大

y最大 $\rightarrow \varepsilon_k, \varepsilon_p$为 0



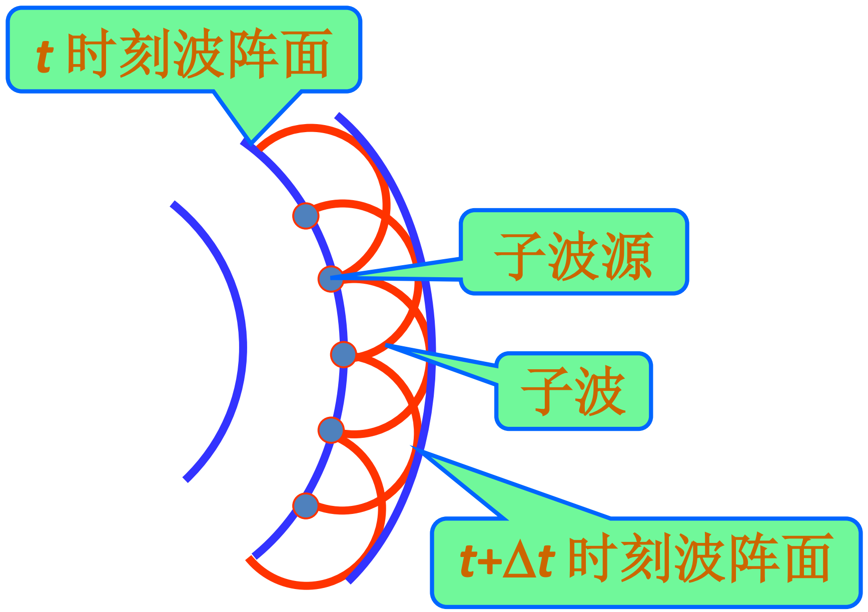
机械波的独立传播原理

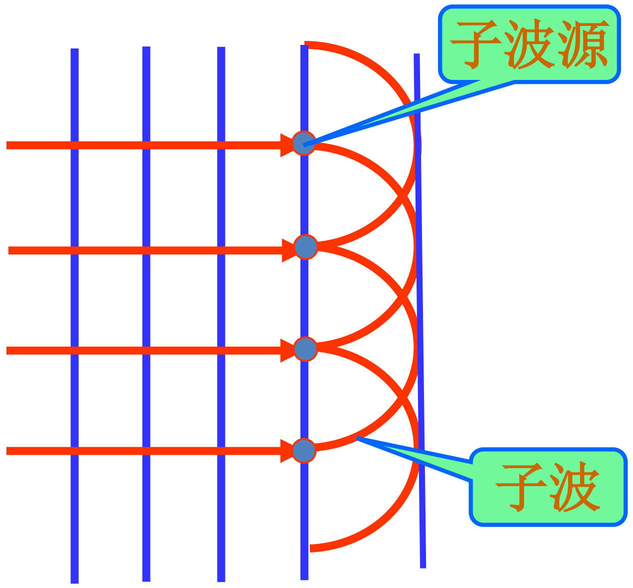
波动方程是线性方程。

- 若干个相同种类的波在介质中传播时，一般情况下每一列波的传播不受到其他波的影响。
- 波的独立传播定律成立时，介质中每一个点部位的振动是各列波单独传播到该点部位振动的叠加，这是波的叠加原理。

惠更斯原理

波动传到的各点都可以看作是发射子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波波阵面的包络面就决定新的波阵面。



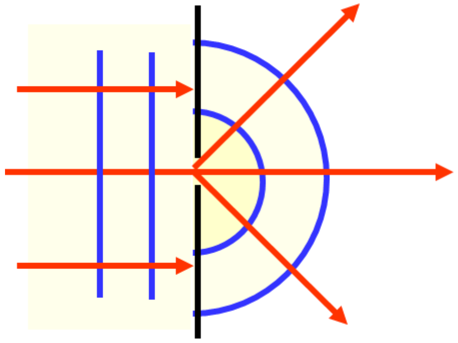


波动现象：衍射

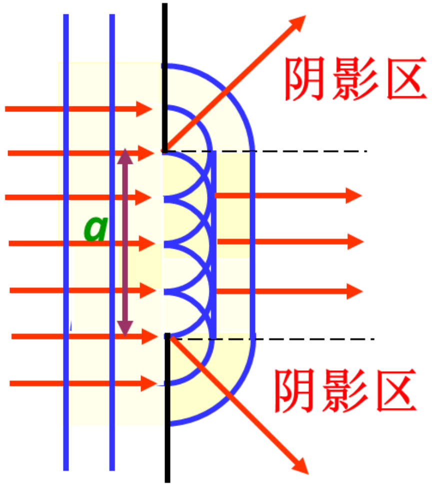
1. 现象

波传播过程中当遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘而传播的现象——衍射。

2. 作图 （可用惠更斯原理作图）



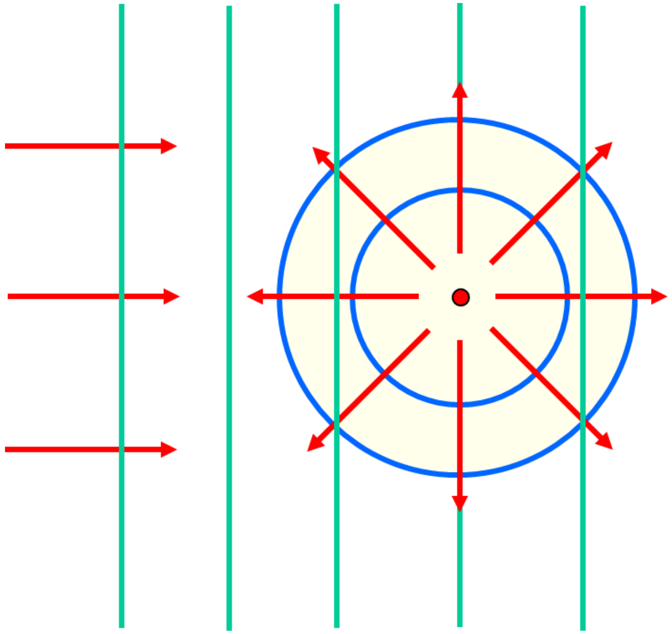
（1）$a \ll \lambda$



（2）$a \sim \lambda$

波动现象：散射

当波在传播途中遇到球形小颗粒时，波将以小颗粒为球心发射球面子波，使波向各个方向散开，这一现象称为散射。



波动现象：折射

用作图法求出折射波的传播方向

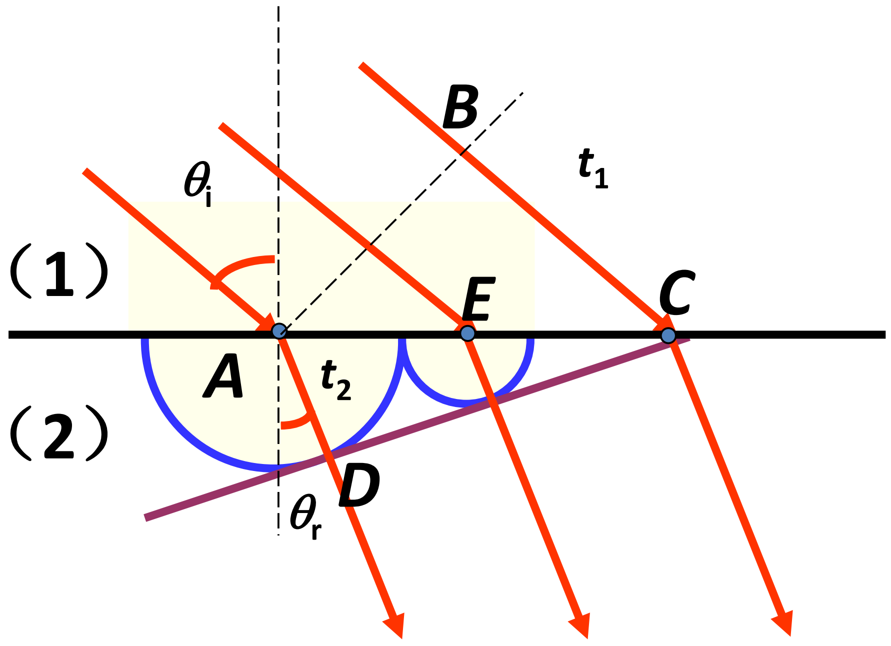
$BC=u_1(t_2-t_1)$

$AD=u_2(t_2-t_1)$

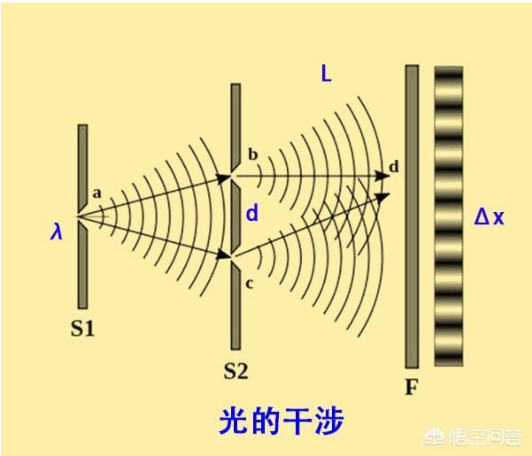
由图可得波的折射定律：

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{u_1}{u_2}$$

θ_i—入射角，θ_r—折射角。

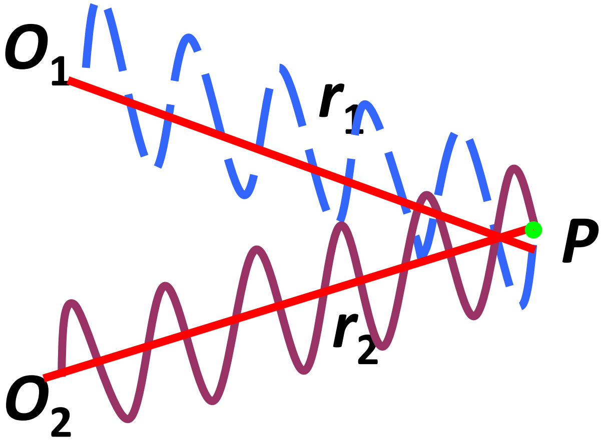


波的干涉现象 基于波的独立传播和叠加原理



相干条件：频率相同，振动方向相同，相位差恒定

两相干波在空间相遇，某些点的振动始终加强另一些点的振动始终减弱，即出现干涉现象。



设 $y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1)$

$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - kr_2)$

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

波的干涉现象

其中 $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - k(r_1 - r_2)$$

设 $\varphi_2 = \varphi_1 \quad \Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$

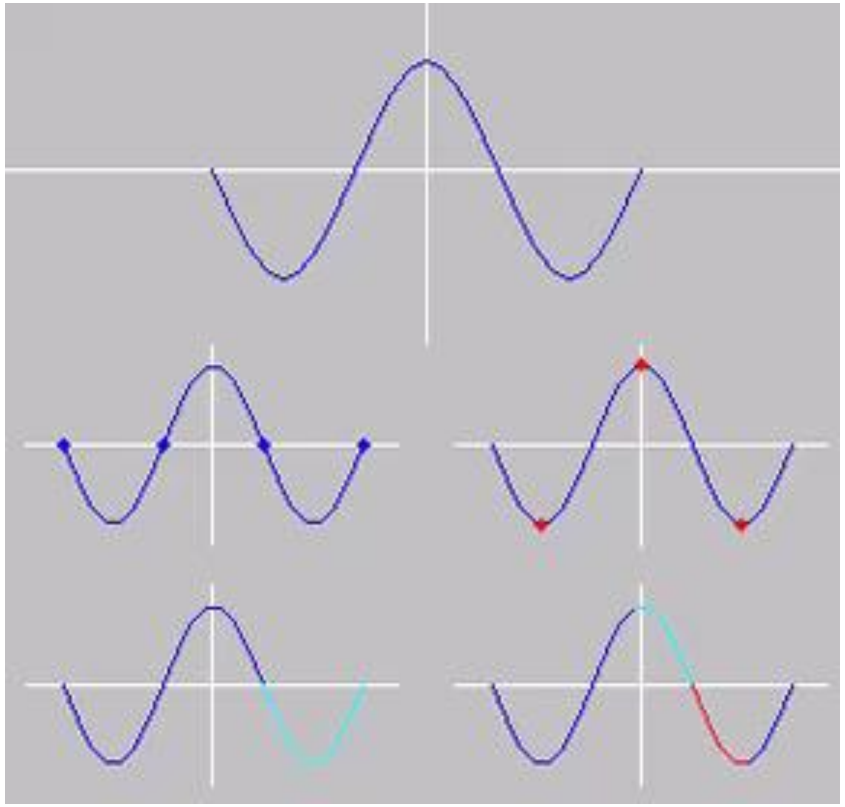
➢当 $r_2 - r_1 = \pm n\lambda, \quad n = 0,1,2\cdots$ $\boxed{A = A_1 + A_2 \quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}}$ 相长

➢当 $r_2 - r_1 = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0,1,2\cdots$ $\boxed{A = |A_1 - A_2| \quad I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}}$

相消

驻波(Standing wave)

在给定一定边界条件限制后，平面波的传播表现出“停下来”的行为。



驻波

当两列振幅相同，频率相同，振动方向相同的波以相反方向传播时，叠加形成驻波。

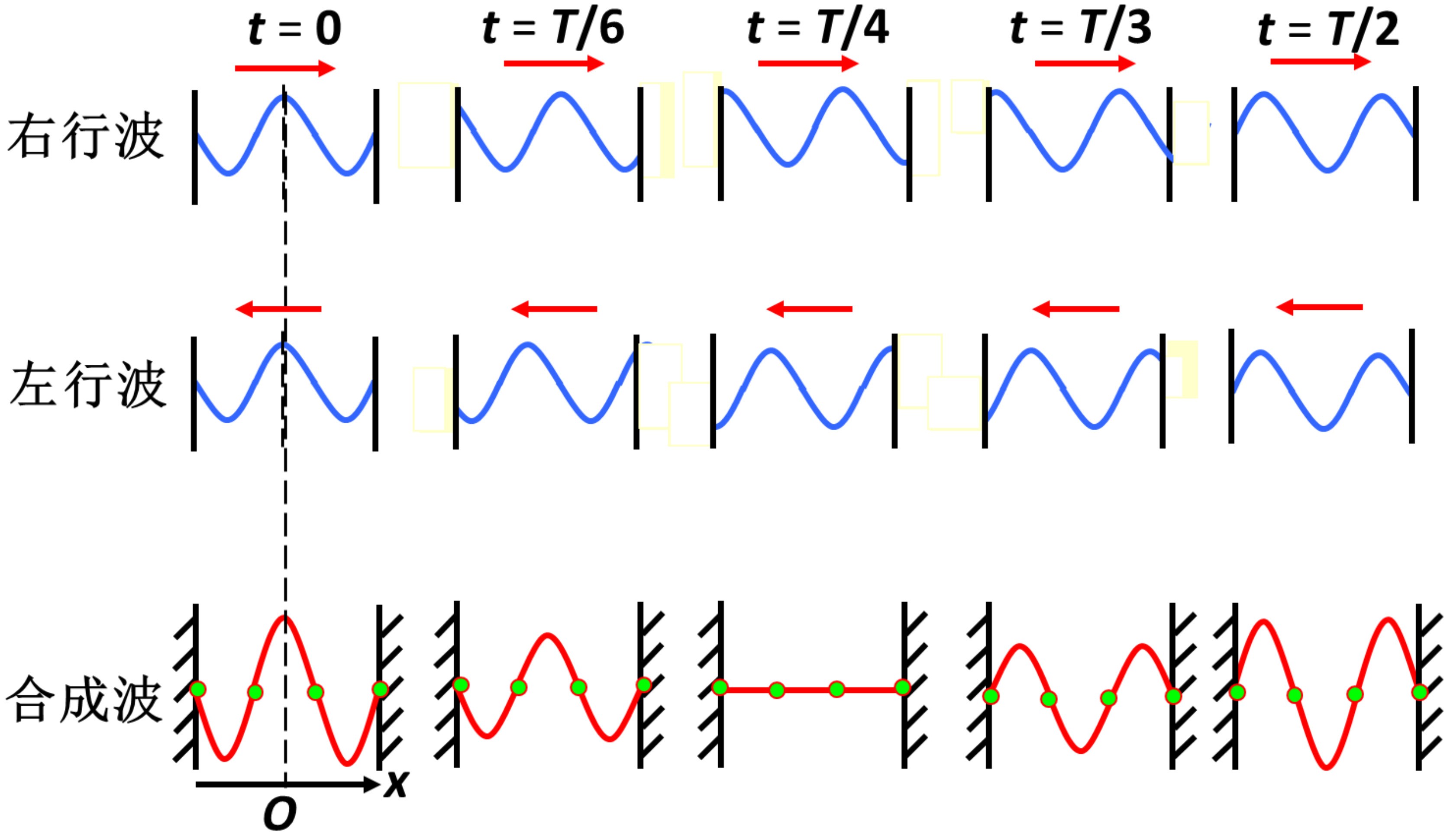
1. 表达式

设：
$$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$$
$$y_2 = A\cos(\omega t + kx)$$

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = 2A\cos kx\cos\omega t}$$

驻波的图像

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos kx \cos \omega t$$



驻波的形状

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = 2A\cos kx\cos\omega t}$$

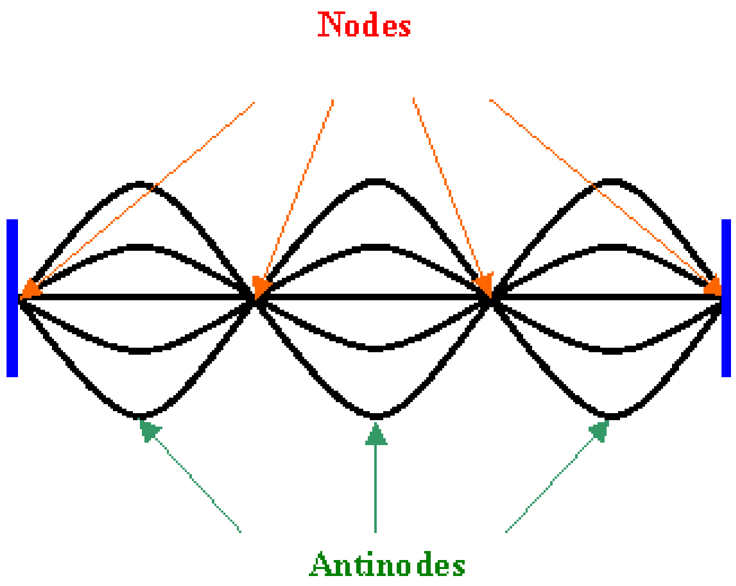
2. 振幅

$$kx = \pm n\pi \quad n = 0,1,2\cdots$$ 波腹

腹—腹 $\boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{2}}$

$$kx = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n = 0,1,2\cdots$$ 波节

节—节 $\boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{2}}$ 腹—节 $\boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{4}}$



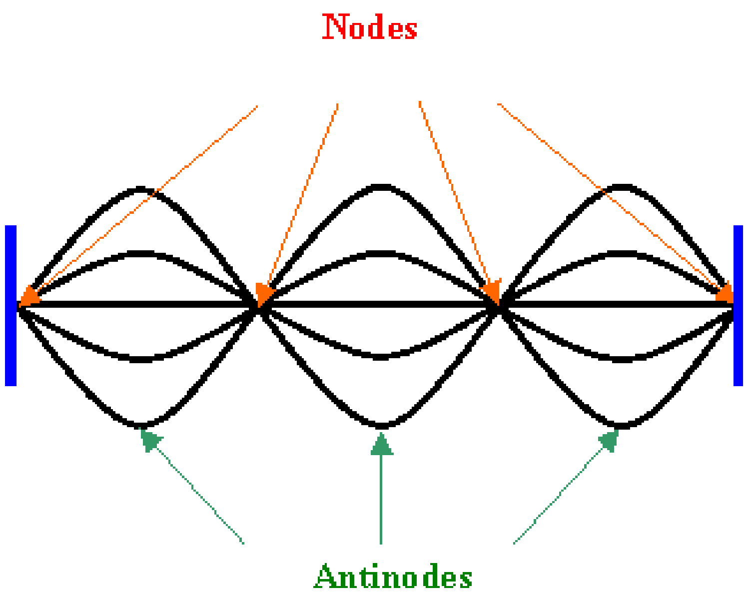
驻波的形状

3. 相位

作振幅为 $2A\cos kx$ 的简谐振动

两相邻波节之间的质元相位相同

每一波节两侧各质元相位相反。



4. 能量

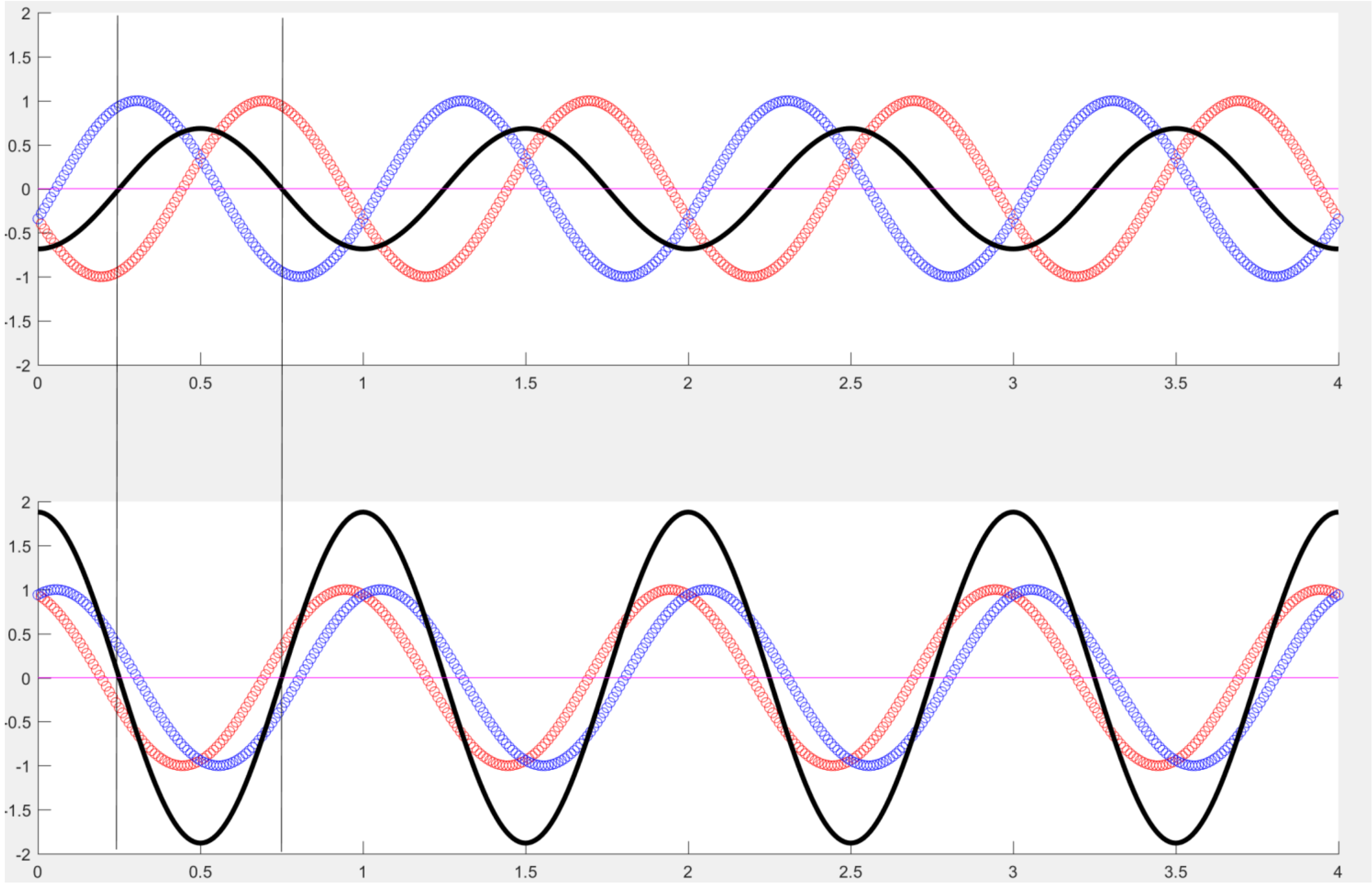
波节只有势能，波腹只有动能。

当所有各点达到最大位移，全部能量为势能。

当所有各点达到平衡位置，全部能量为动能。

驻波的简正模式(normal mode)

两端固定的张紧弦中产生驻波



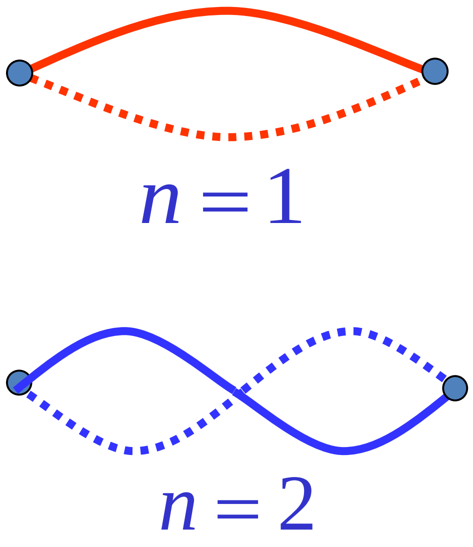
驻波的简正模式(normal mode)

两端固定的张紧弦中产生驻波，因此波长只能取分立的值。
因此对角频率和波数也有相应分立值要求

$$n \cdot \frac{\lambda}{2} = L \quad n = 1,2,3 \cdots$$

$$\boxed{\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{nu}{2L} \qquad n=1,2,3\cdots}$$

u为波动传播的速度，
ν称为简正频率



$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1,2,3\cdots \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{n\pi u}{L} \quad n = 1,2,3\cdots$$

对应的驻波称为弦的简正模或固有振动

边界条件

	行波	驻波
动力学方程（波动方程）	$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$	$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$
初始条件	初速度和初位移	初速度和初位移
边界条件	无	有（比如两端固定）
通解	$y = A\cos(\omega t \mp kx)$ $\omega = uk$，ω, k取值可连续变化	$y = 2A\cos k\,x\cos\omega\,t$ $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$　$\omega = 2\pi v = \frac{n\pi u}{L}$　$n = 1,2,3\cdots$

边界条件的作用

1. 不同的边界条件，决定了简正模式的不同函数形式。
2. 边界条件的限制，使得简正模式的k, w都只能取若干分立的值（称为**本征值** eigen-value）

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=L}=0$$

两端固定的弦

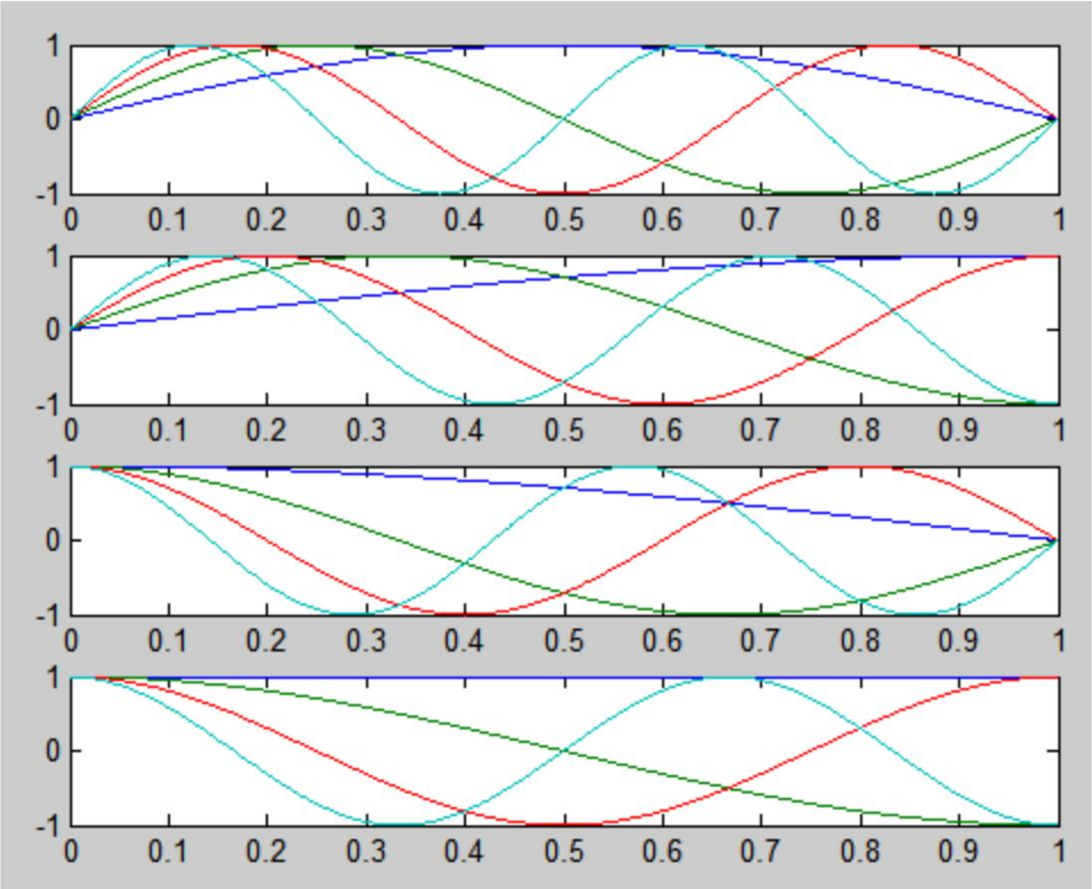
$$u|_{x=0}=0, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L}=0$$

一端固定一端自由振动的弦

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, u|_{x=L}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L}=0$$

两端均自由振动的弦



驻波的一般解

可以证明，一般的驻波形式，可以写成所有简正模式的线性叠加。
以两段固定弦振动为例：其满足波动方程和边界条件的通解为

$$y(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi u}{2L}t+B_n\sin\frac{n\pi u}{2L}t\right)\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x$$

关于时间演化的部分　　　　关于空间演化的部分

其中A_n, B_n为展开系数，通过振动的初始条件可以求出来。

电子轨道波函数

1. 量子力学假设：将电子在微观下当作一个波动来处理（几率波）。

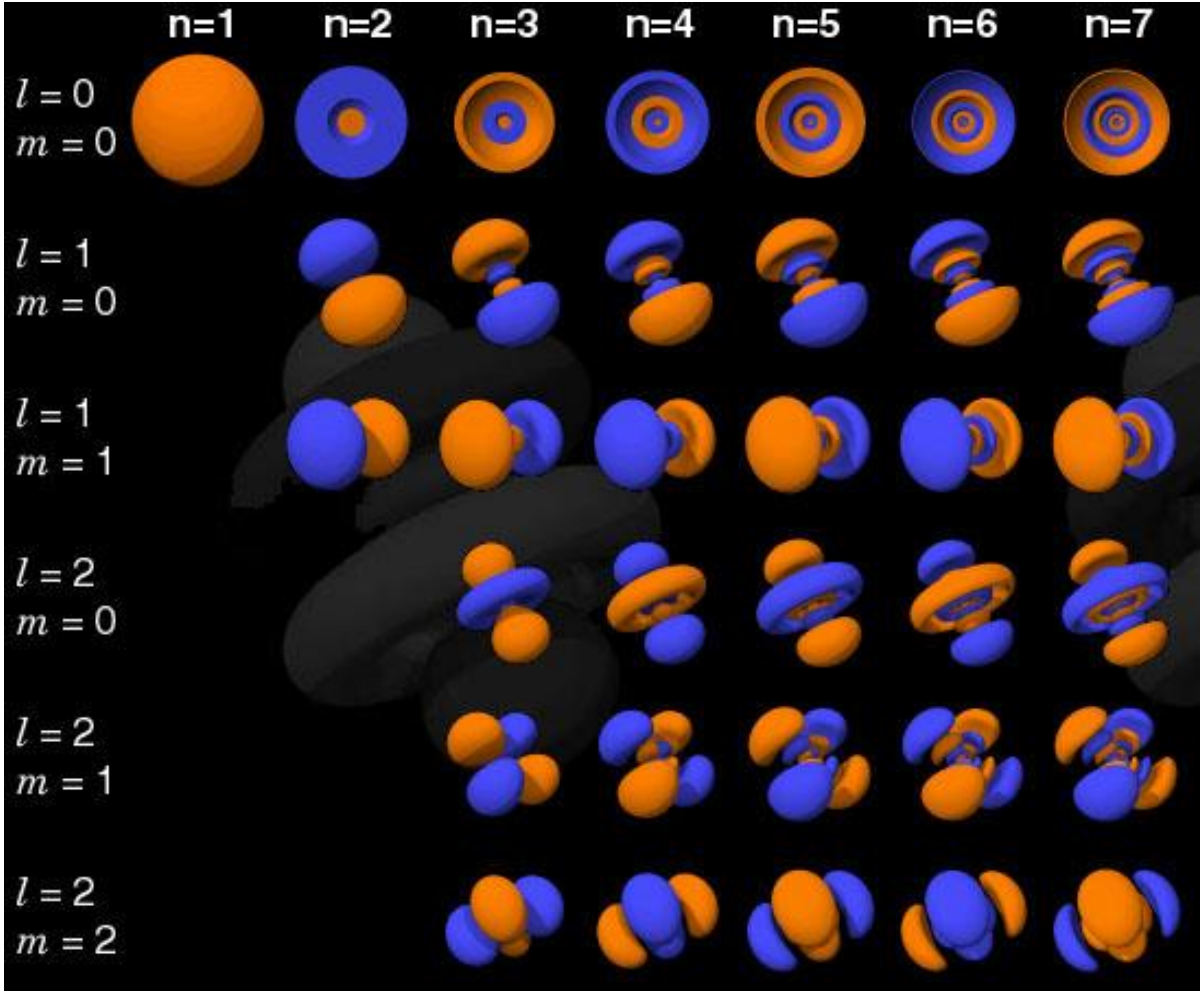
2. 如同机械波一样的情形，电子波函数也满足波动方程，即为薛定谔方程。

一维薛定谔方程：

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V\psi}$$

3. 在库仑势场的作用下，较低能量的电子被束缚在原子核附近，形成了驻波。
驻波的简正模式即为电子轨道。

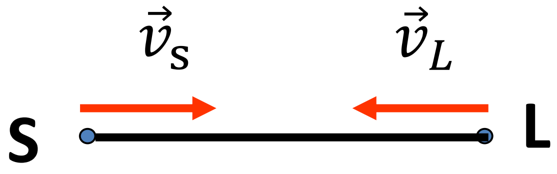
4. 由于是三维空间，所以需要三个不同的分立特征值去描述简正模式，这三个特征值被叫做n(主量子数), l(角量子数)和m(磁量子数)。

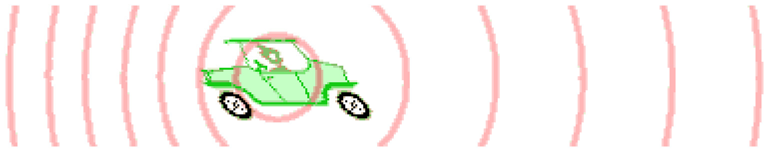

n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
n=6
n=7
l = 0
m = 0
l = 1
m = 0
l = 1
m = 1
l = 2
m = 0
l = 2
m = 1
l = 2
m = 2

多普勒效应

当波源S和接收器r有相对运动时，接收器所测得的频率f_L不等于波源振动频率 f_s 的现象。

机械波的多普勒效应





- 参考系：媒质
- 符号规定： S和r 相互靠近时v_s, v_r为正
- f_S：波源振动频率，f: 波的频率，f_L：接收频率

1. 波源和接收器都静止 (v_S=0，v_L=0)

$$f_L = f = f_s$$

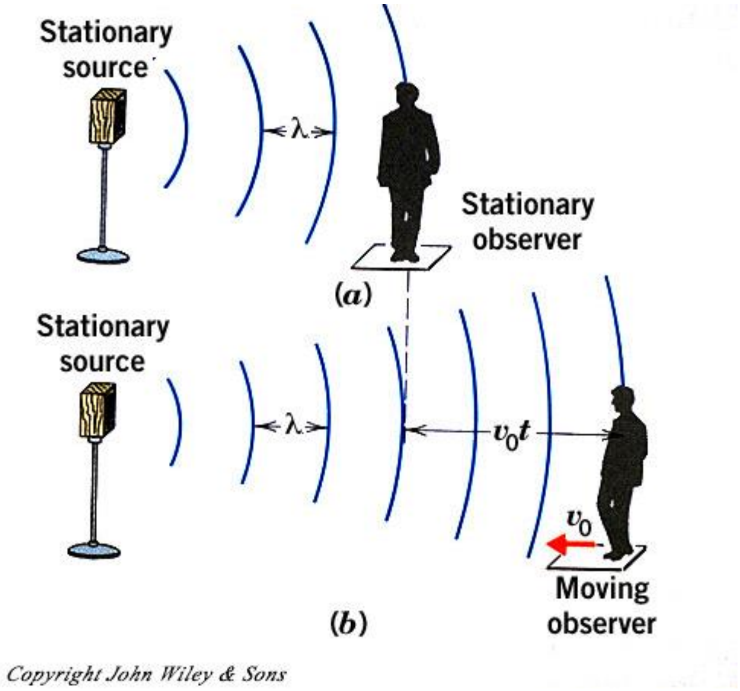
多普勒效应

2. 波源静止，接收器运动(v_s=0)

相当于单位时间内波通过接收器的总距离为 $v+v_{\mathrm{L}}$

单位时间接收到完整波的个数

$$\boxed{f_{\mathrm{L}}=\frac{v+v_{\mathrm{L}}}{\lambda}=\frac{v+v_{\mathrm{L}}}{v}f_{\mathrm{s}}}$$



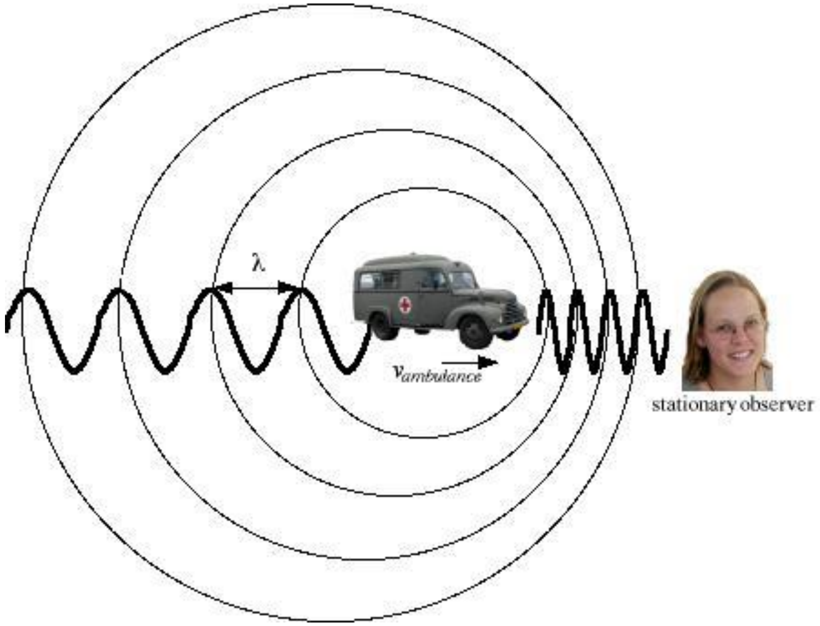
观察者相对波源相向运动，频率增大；观察者相对波源远离运动，频率减小。

多普勒效应

3. 波源运动，接收器静止(v_r=0) → 不等价于接收器向波源运动！介质相对运动

非自由传播，连续受迫振动，波长变化：$\lambda = \frac{v}{f_S} - \frac{v_S}{f_S}$

$$\boxed{f_L = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_S} f_S}$$



波源相对观察者相向运动，频率增大；波源相对观察者远离运动，频率减小。

多普勒效应

4. 波源和接收器皆运动

$$\boxed{f_L = \frac{v + v_L}{\lambda} = \frac{v + v_L}{v} f_s}$$

$$\boxed{f_L = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_s} f_s}$$

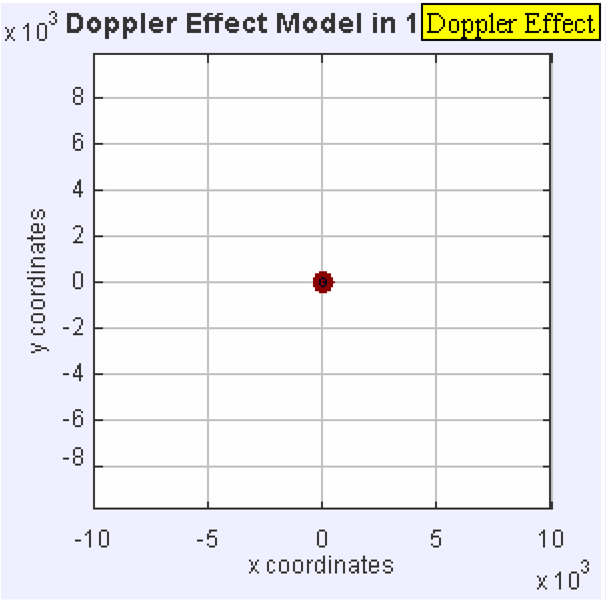
$$\boxed{f_L = \frac{v + v_L}{v - v_s} f_s}$$

➢若S和 L 的运动不在二者连线上

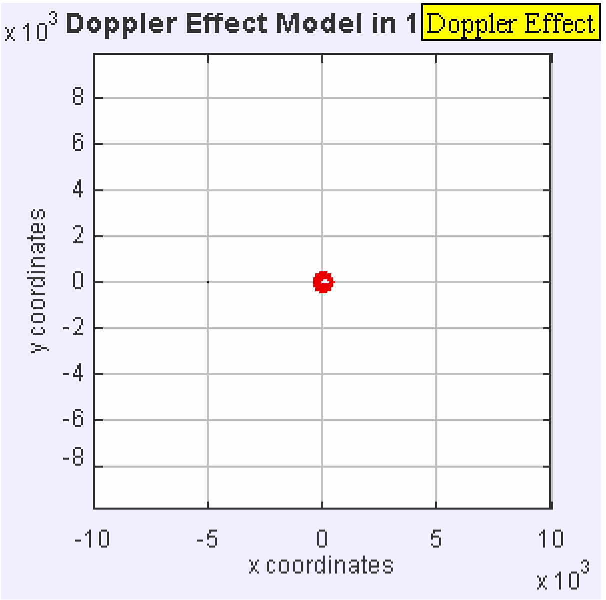
$$f_L = \frac{v + v_L\cos\theta_L}{v - v_s\cos\theta_s} f_s$$

➢有纵向多普勒效应；无横向多普勒效应(不考虑相对论效应)

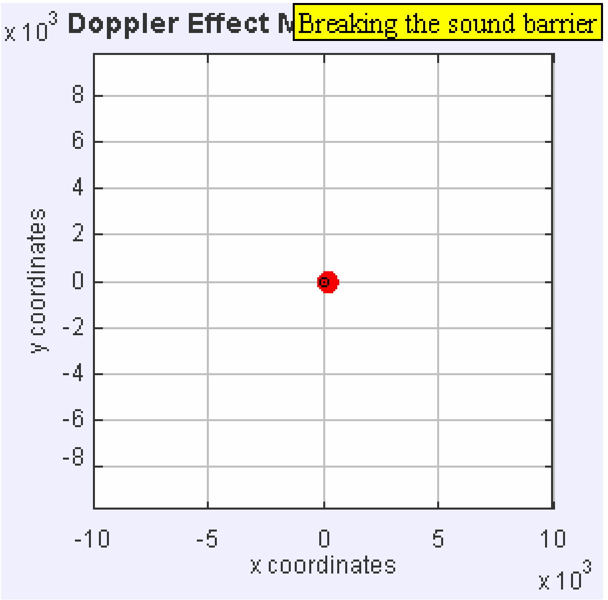
多普勒效应的限制 $\lambda = \frac{v}{f_s} - \frac{v_s}{f_s}$



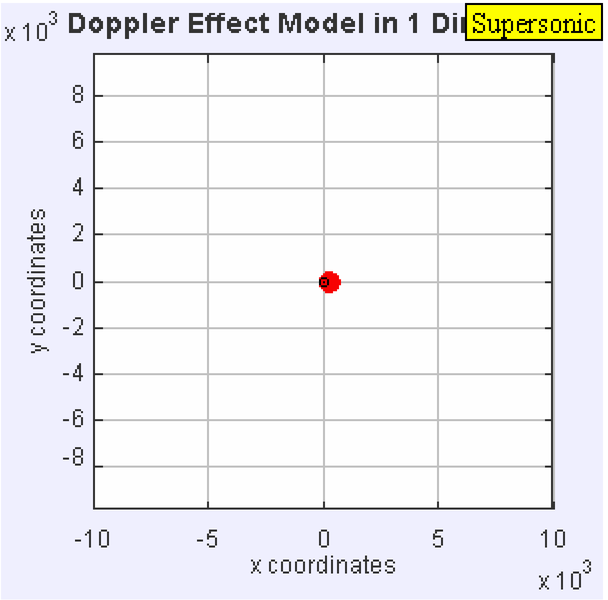
波源相对于介质静止



多普勒效应



“音障”



激波
（Shock Wave)

波源的速度超过了
介质中的波速，
超音速飞机