周期运动

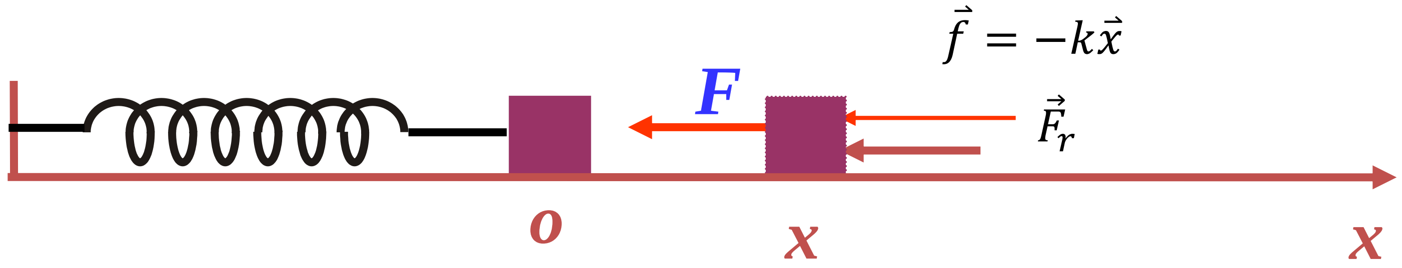
受迫振动与共振

受迫振动与共振

受迫振动： 系统在周期性的外力持续作用下所发生的振动。

驱动力：周期性的外力

在简谐振动恢复力f，阻尼 F_r之外，增加新的周期力 $F = F_0 \cos \omega t$



注意：新的周期不一定等于简谐振动系统的本征周期。

受迫振动的动力学方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0\cos\omega t$$

令： $\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{\gamma}{m} = 2\delta$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$$

非齐次线性微分方程

不含x, dx/dt, d^2x/dt^2的非齐次项

受迫振动的试探解

试探解：一个角频率也为ω的简谐运动

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m\sqrt{4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}}$$

$$\boxed{\tan\phi = \frac{2\omega\delta}{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

受迫振动的完整解

特解 $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t}$ **+** 通解 $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$

完整解：$e^{-\delta t}[A'\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\right)+B'\sin(t\sqrt{\omega_0^2-\delta^2})]$ $+A\cos(\omega t+\phi)$ 欠阻尼

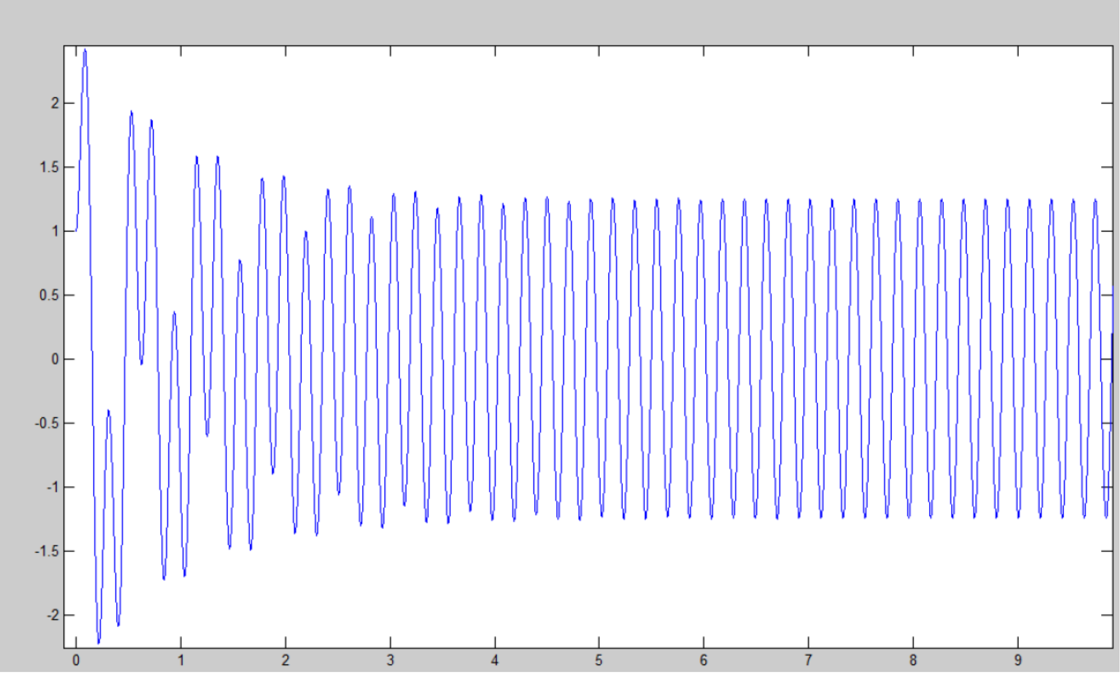
$e^{-\delta t}(A'+B't)$ $+A\cos(\omega t+\phi)$ 临界阻尼

$e^{-\delta t}[A'e^{t\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}+B'e^{-t\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}]$ $+A\cos(\omega t+\phi)$ 过阻尼

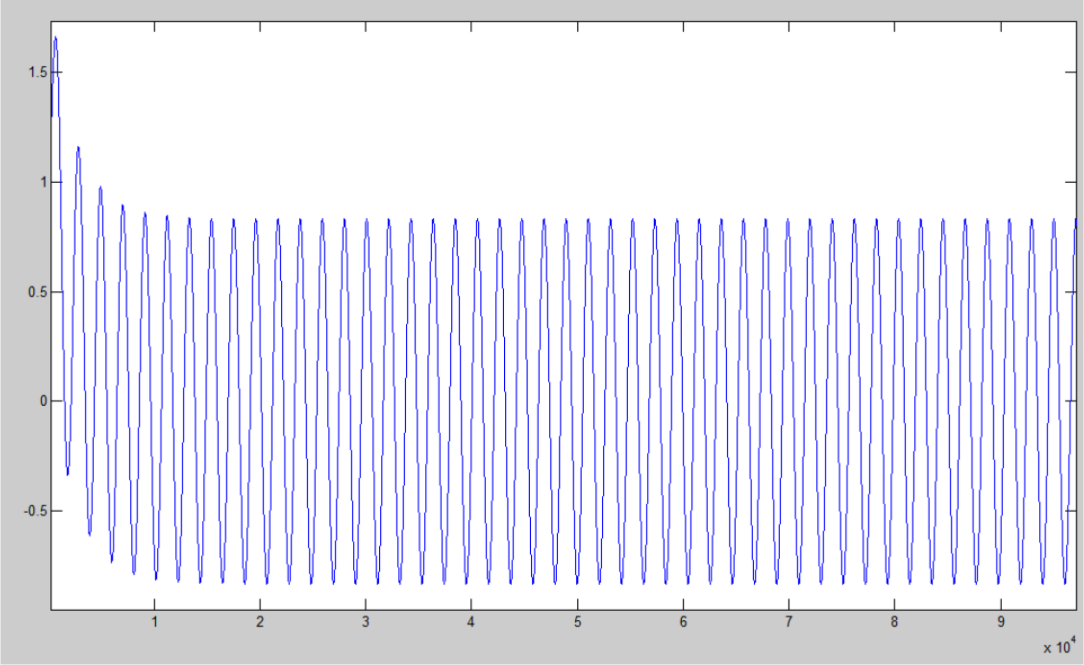
无论是那种阻尼情况，前面那部分都会指数衰减到0，$t\to\infty$时解趋向于 $A\cos(\omega t+\phi)$

在稳定振动状态下，受迫振动的频率等于策动力的频率。

受迫振动稳定解建立的动态过程



欠阻尼



过阻尼

共振

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$$

特解：$x = A\cos(\omega t + \phi)$

驱动力 $F = F_0\cos\omega t$

阻尼 $F_{\mathrm{r}} = -\gamma v = -2m\delta\cdot v$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m\sqrt{4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}}$$

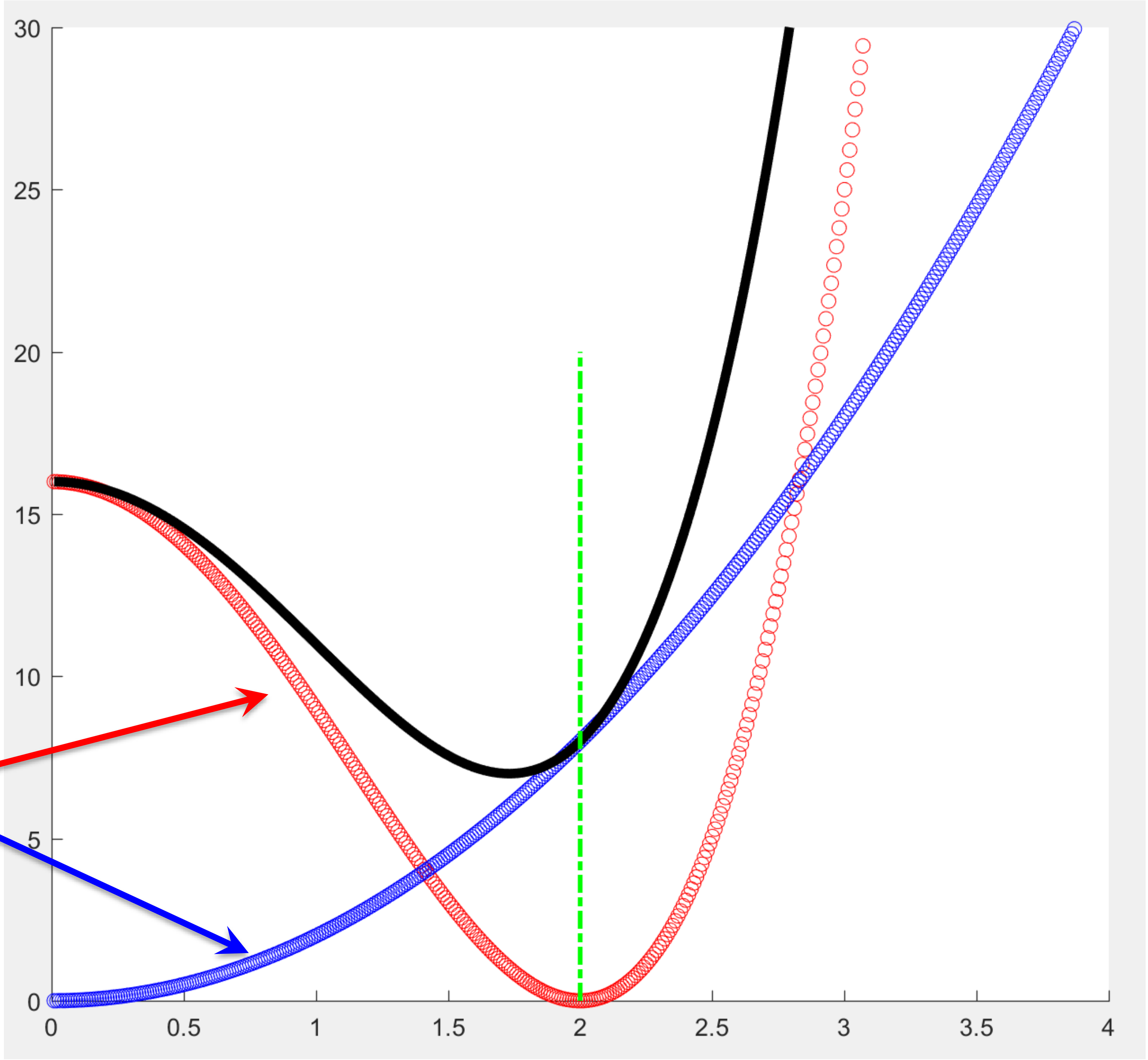
振幅A（能量）与驱动力角频率ω之间的关系？谐振子如何从驱动力中吸收能量？

共振

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

$4\omega^2\delta^2$

$(\omega^2 - \omega_0^2)^2$



共振

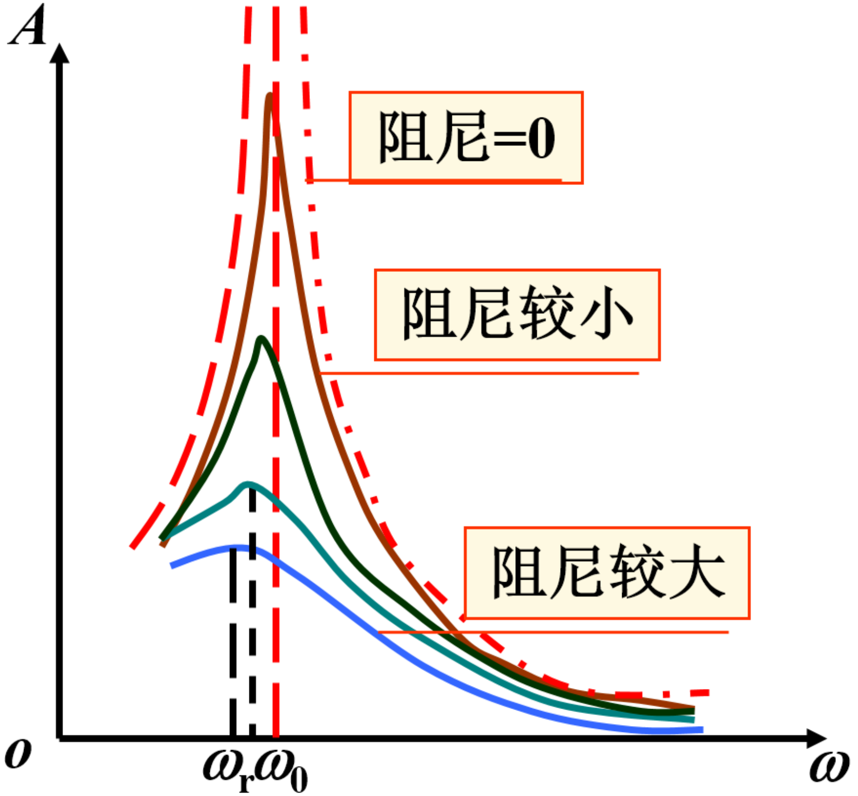
共振：当策动力的频率接近于固有频率时，受迫振动的振幅达到最大值的现象。

由：$$A=\frac{F_0}{m\sqrt{4\omega^2\delta^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2}}$$

极大值在：$\omega=\sqrt{{\omega_0}^2-2\delta^2}=\omega_r$

共振频率

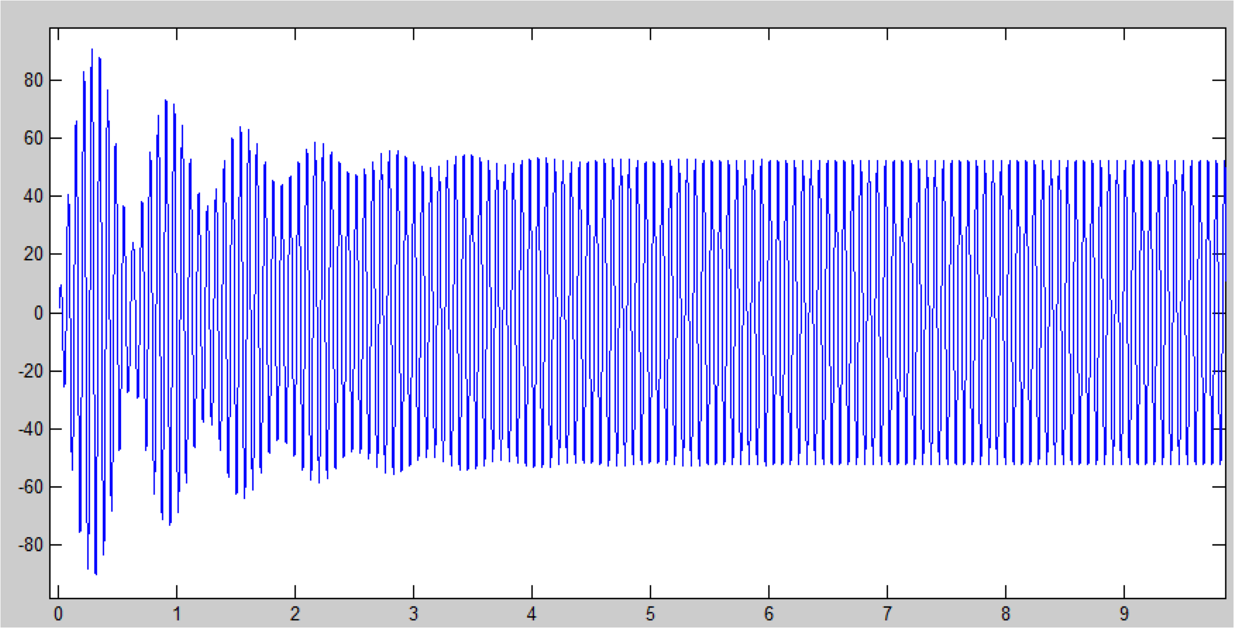
$$\boxed{A_{\max}=\frac{F_0}{2m\delta\sqrt{{\omega_0}^2-\delta^2}}}$$



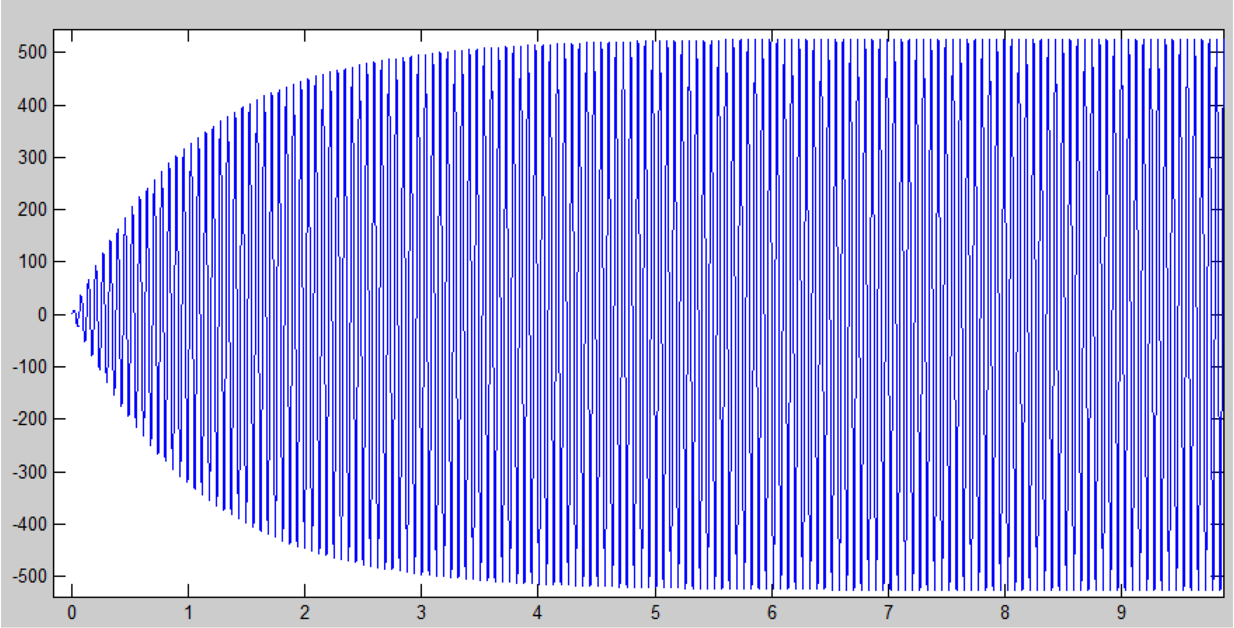
有阻尼时，共振频率不是本征频率。

共振现象(ω_0=1,δ=0.01)

弱阻尼，近共振和共振的对比

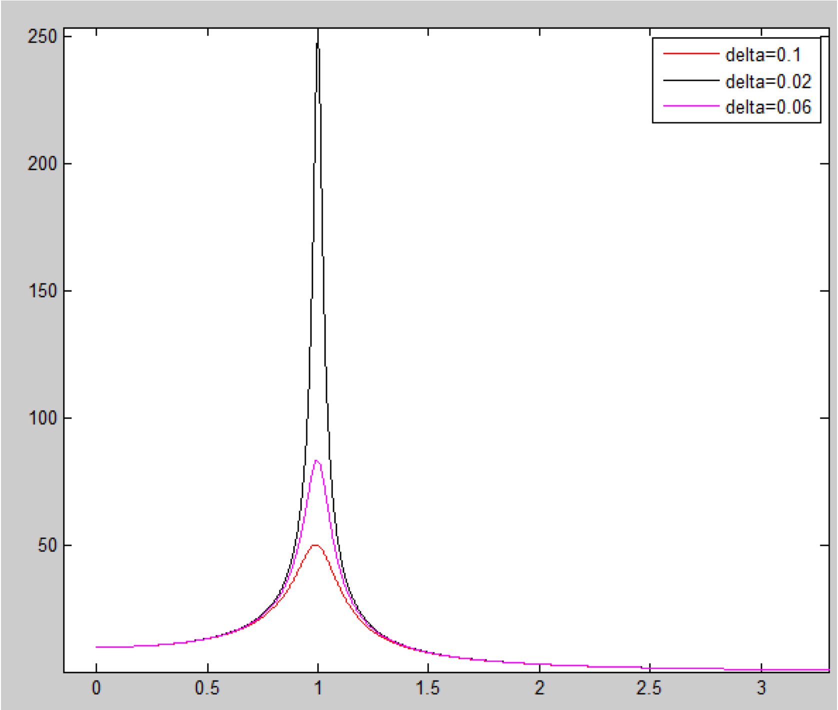


0.9倍共振频率，振幅52.4



共振频率，振幅526.3

共振与品质因素



$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

随着阻尼项的减弱，共振的振幅越来越大，共振峰也越来越尖锐

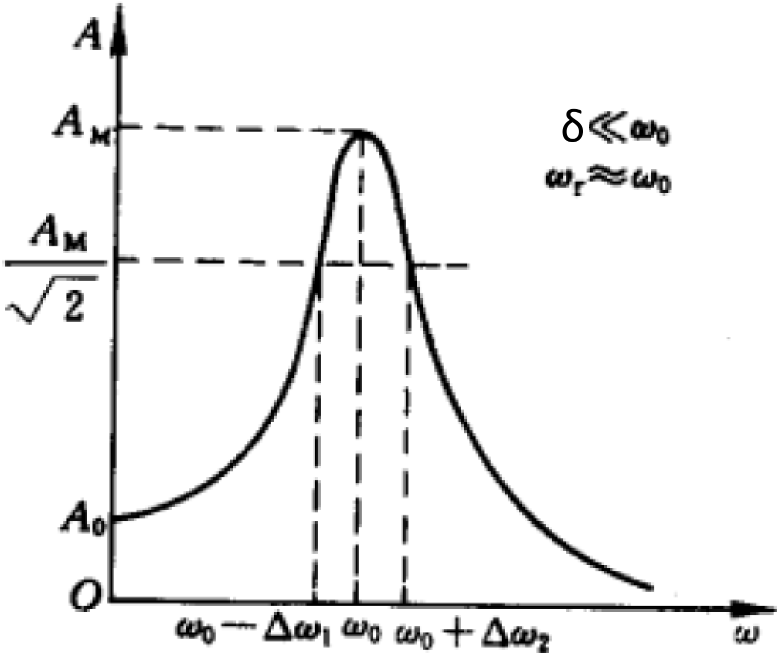
取共振振幅的$\frac{1}{\sqrt{2}}$处的峰的宽度

可以证明其宽度约等于2δ

因此品质因素

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

能够用来描述共振曲线的锐度



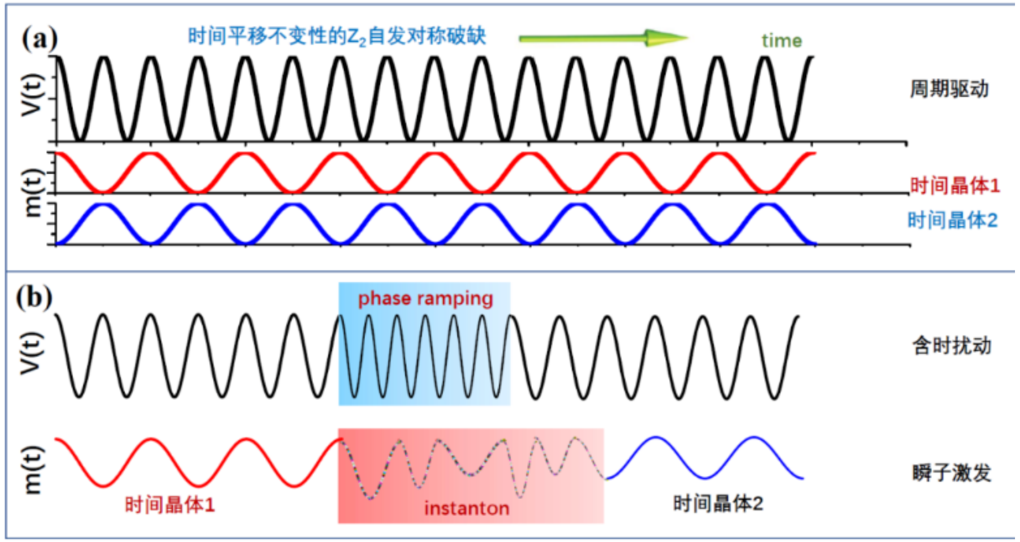
时间晶体

晶体：原子周期排列，自发破缺了空间的平移对称性

F. Wilczek：时间的平移对称能不能被自发破缺？H. Watanabe and M. Oshikawa: NO!

但是分立的时间平移对称可以自发破缺　　　比如$F_0 \cos \omega t$

Floquet时间晶体



波函数的周期是驱动周期的两倍

系统会不会吸收驱动力的能量？
多体局域化：不会，没有熵增，没有各态历经，没有热化

复杂振动合成

振动的合成与分解

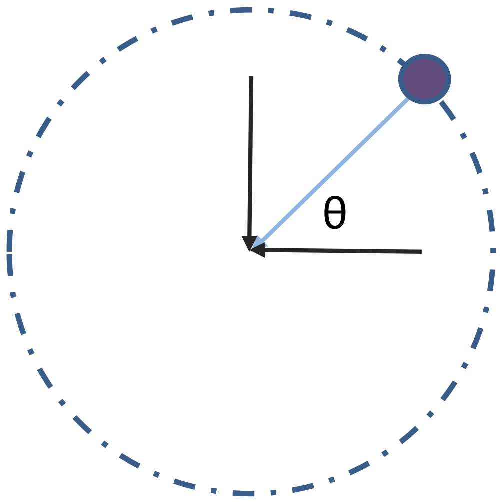
某一质点在直线上同时参与两个独立的同频率的简谐振动，其振动方程分别表示为：

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2)$$

两种办法：

1. 三角函数展开，组合
2. 向量分析

圆周运动-分解



$$\vec{F} = -\vec{r}\omega^2 \quad \begin{cases} F_x = -r\omega^2\cos(\theta) = -\omega^2 x \\ F_y = -r\omega^2\sin(\theta) = -\omega^2 y \end{cases}$$

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \quad \begin{cases} x = r\cos(\theta) = r\cos(\omega t) \\ y = r\sin(\theta) = r\cos(\omega t - \pi/2) \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x \Longrightarrow \ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{m}\vec{r}$$

线性方程，线性叠加

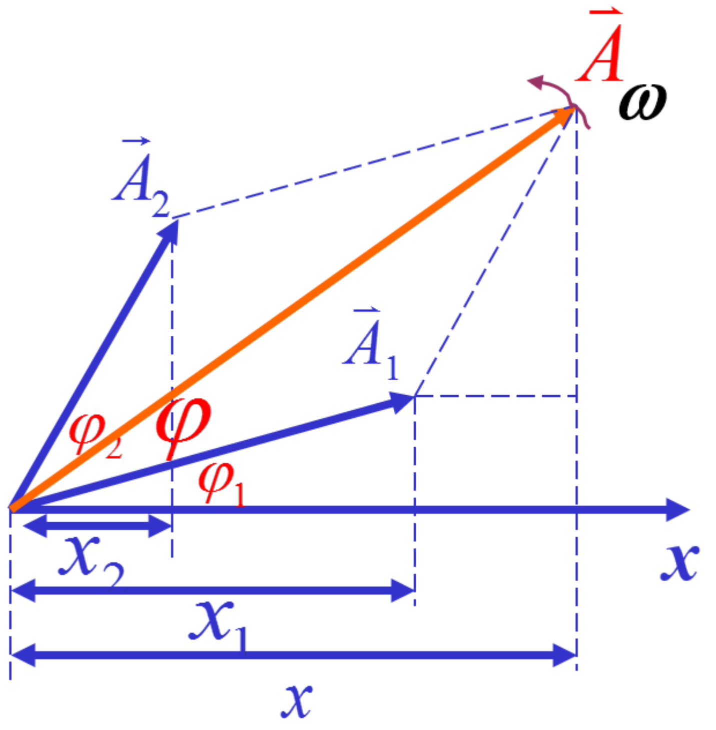
振动的合成与分解

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$x = x_1 + x_2$$

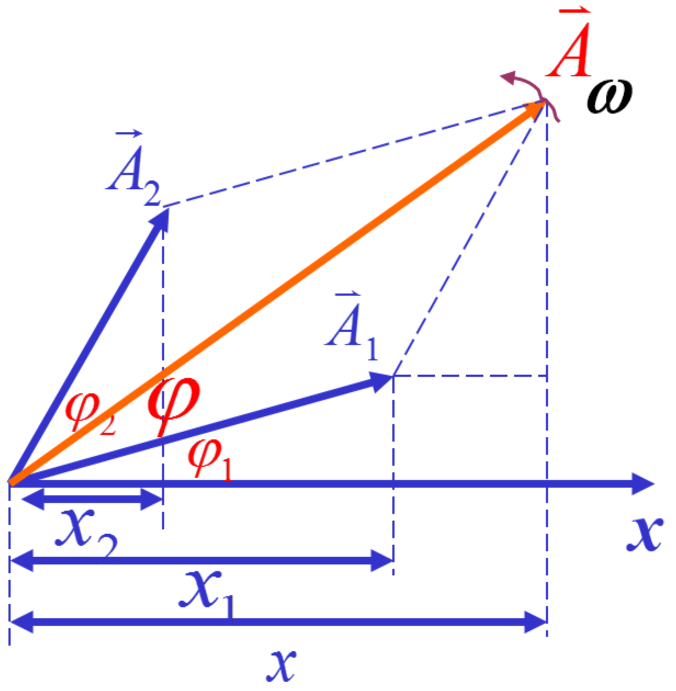


一个质点参与两个在同一直线上频率相同的简谐振动，其合成运动仍为简谐振动。

同频率平行简谐振动的合成

$$A=\sqrt{{A_1}^2+{A_2}^2+2A_1A_2\cos(\phi_2-\phi_1)}$$

$$\phi=\arctan\frac{A_1\sin\phi_1+A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2}$$



(1)若： $\phi_2-\phi_1=2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 同相位

则： $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}=A_1+A_2$

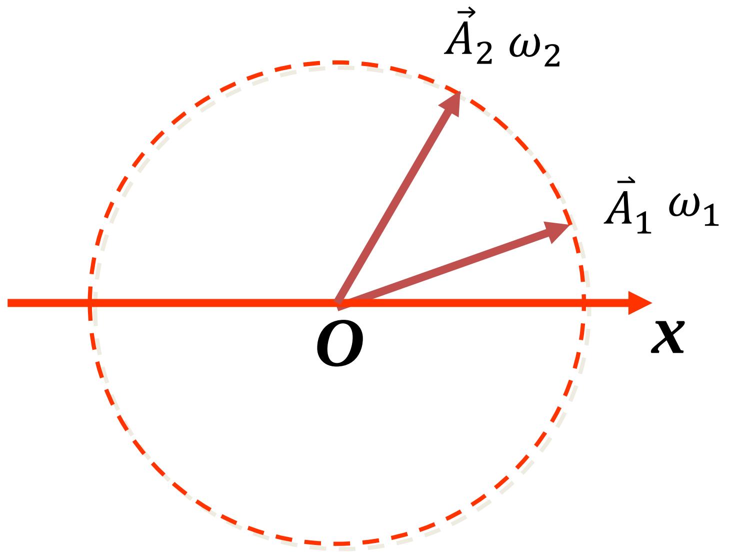
(2)若： $\phi_2-\phi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 反相位

则： $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2}=|A_1-A_2|$

不同频率平行简谐振动的合成

设两同方向，角频率分别为 ω_1 和 ω_2 的两简谐振动, $\omega_2 > \omega_1$

它们所对应的旋转矢量分别为 $\vec{A}_1$和 $\vec{A}_2$



$\vec{A}_2$相对于$\vec{A}_1$的转动角速度： $\omega_2 - \omega_1$

两矢量同向重合时：

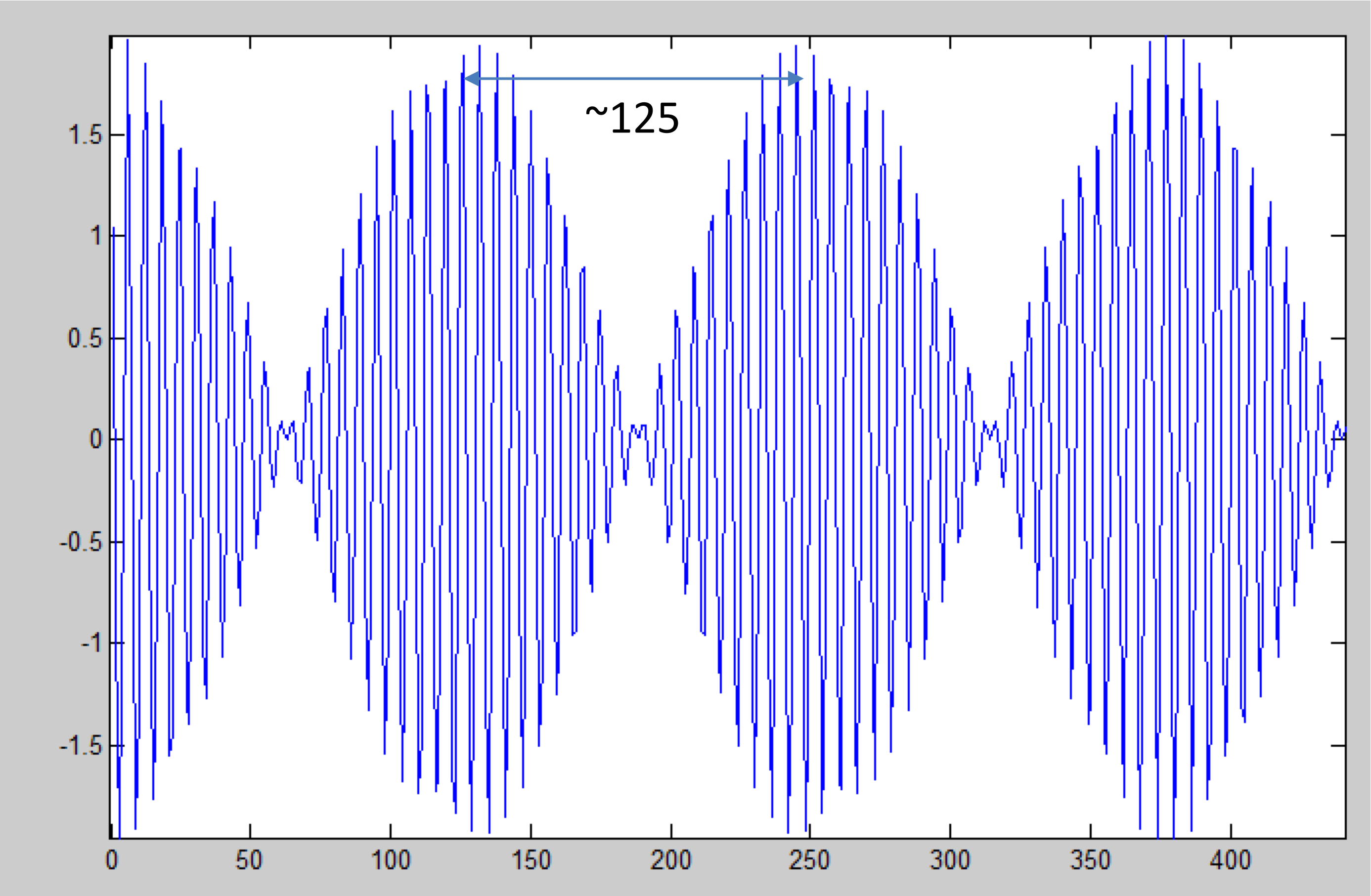
➢合振动振幅 $\vec{A}$ 极大

两矢量反向重合时：

➢合振动振幅 $\vec{A}$ 极小

➢拍(Beat)：合振动的振幅时大时小的现象

拍



$\cos(t) + \cos(1.05t)$

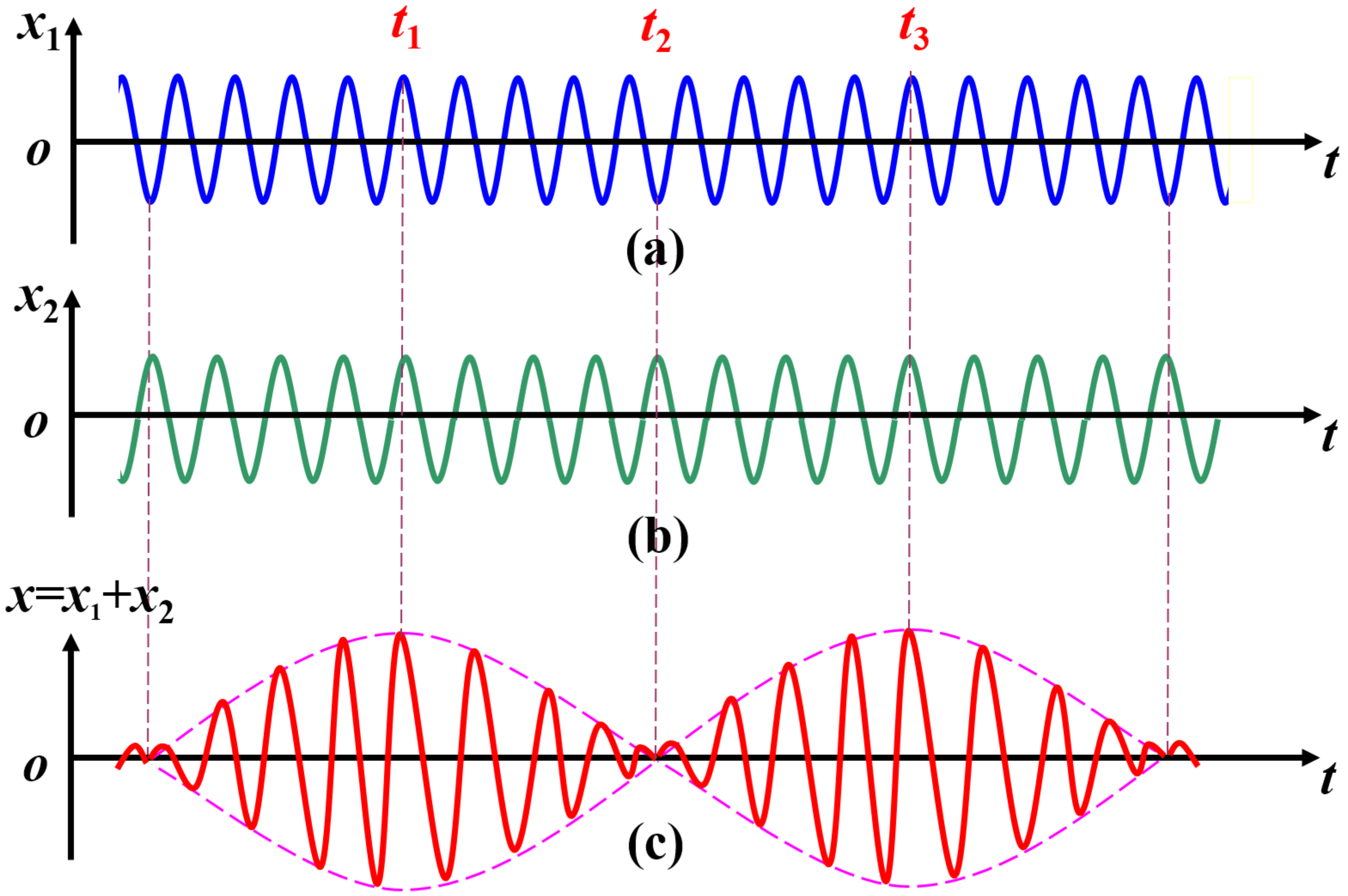
拍的周期：

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

拍的频率：

$$f = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = f_2 - f_1$$

拍的形成



拍的频率的计算

$$x_1 = A_1 \cos\omega_1 t = A_1 \cos 2\pi f_1 t$$

$$x_2 = A_2 \cos\omega_2 t = A_2 \cos 2\pi f_2 t$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t$$

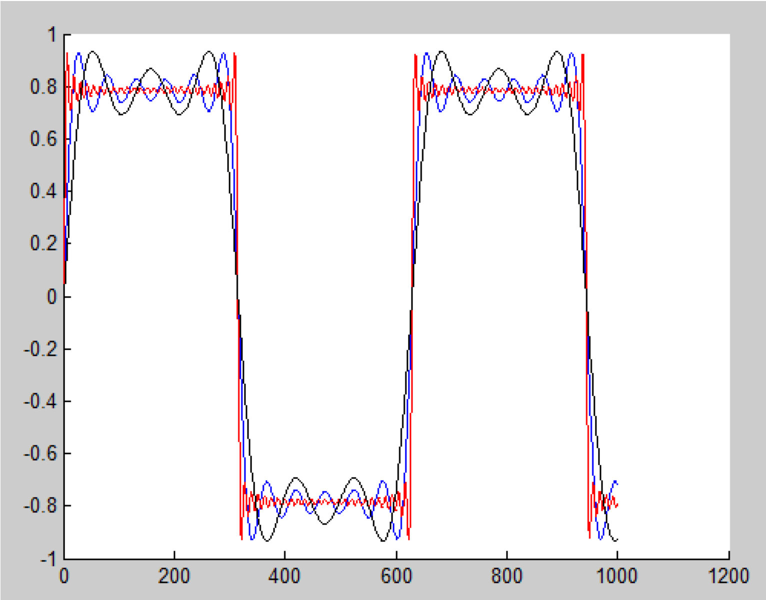
设：$A_1 = A_2 = A$ $\qquad x = 2A\cos 2\pi \frac{f_2 - f_1}{2} t \cdot \cos 2\pi \frac{f_2 + f_1}{2} t$

振幅：

$\left| 2A\cos 2\pi \frac{f_2 - f_1}{2} t \right|$ 随时间缓变，拍频 $\quad \cos 2\pi \frac{f_2 + f_1}{2} t$ 随时间快速变化

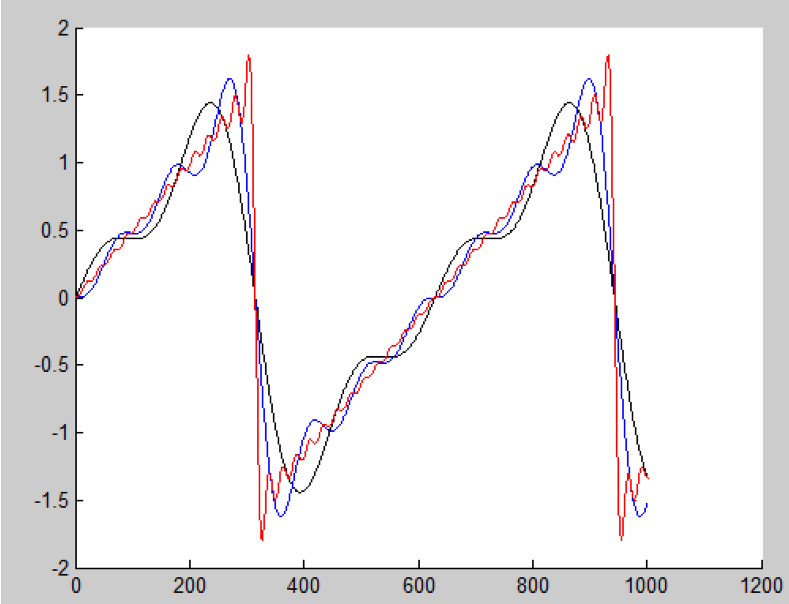
非简谐振动

任何一个周期性运动，都能用其频率整数倍的简谐振动的叠加得到。



$$(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{7}\sin 7\omega t + \cdots\cdots)$$

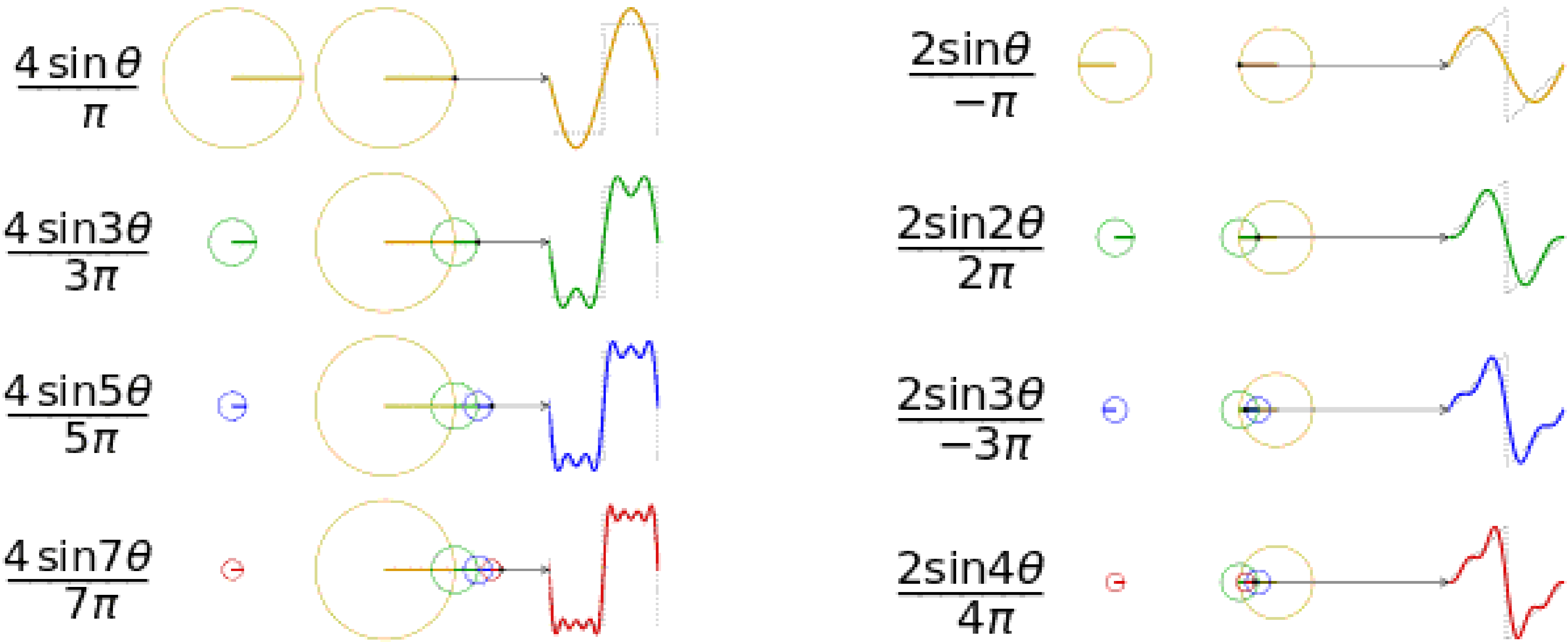
三项，六项，二十六项的叠加结果



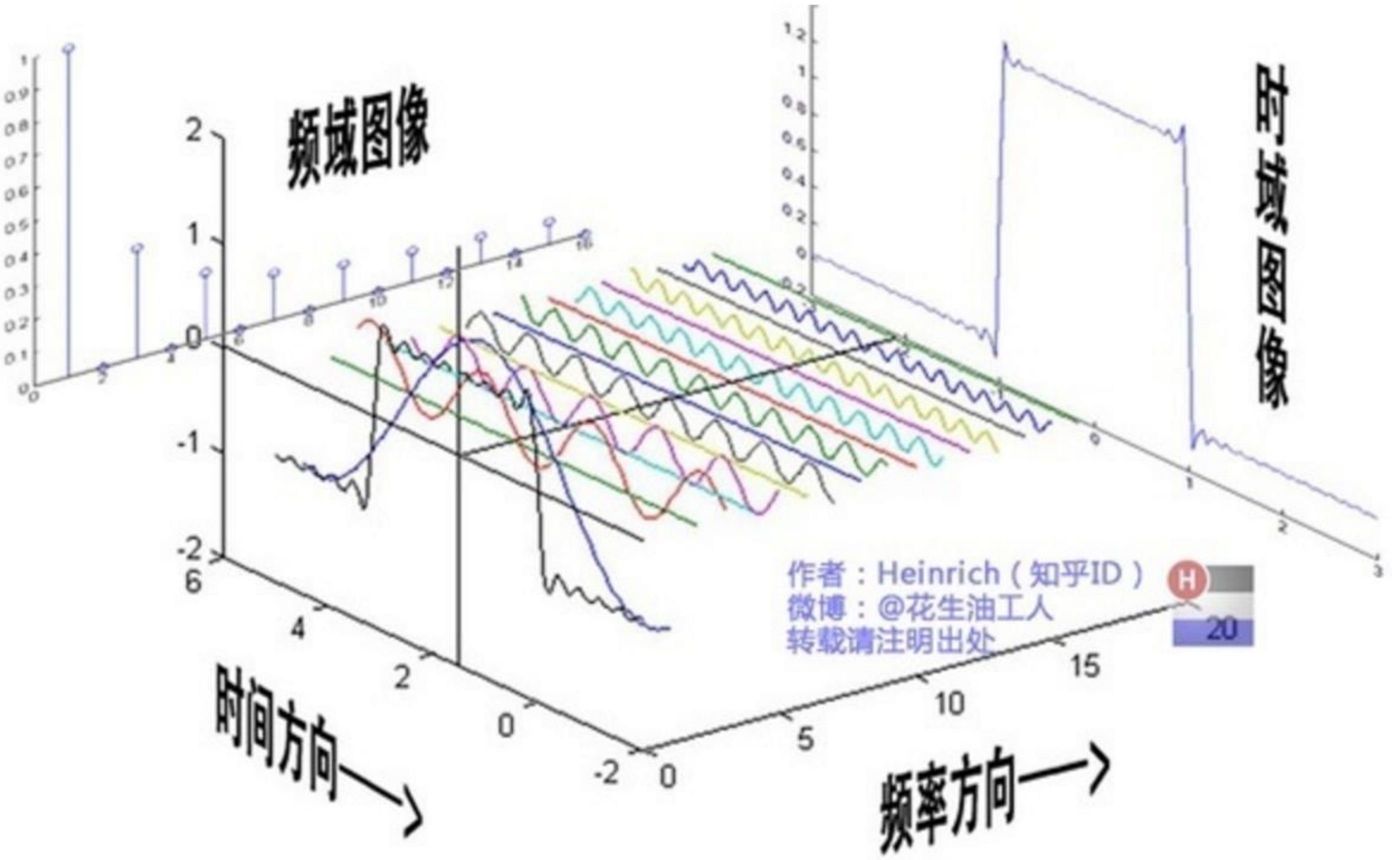
$$\sin(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) - \cdots$$

三项，六项，二十六项的叠加结果

非简谐振动-y方向投影示意



傅里叶级数



一个信号，如果用一组简谐振动将其表示出来，这组简谐振动称为傅里叶级数。

将信号分解有什么用？

背后的数学问题：

1. 是否对所有的信号都能做这样的函数展开（傅里叶级数的完备性）。
2. 展开的级数之和，是否能够收敛到原来的函数（级数的收敛性）。

非线性系统

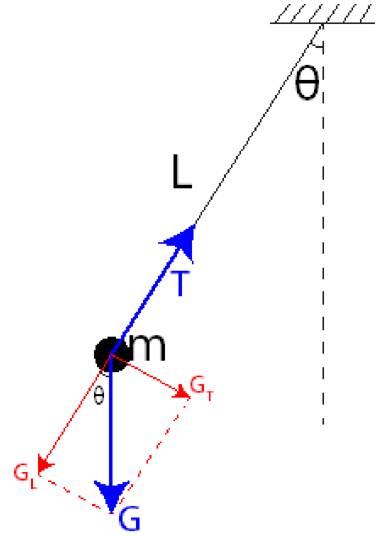
- 如果一个体系的演化必须用非线性方程来描述（即方程中出现了未知变量的二次方或更高阶项），则为非线性系统。

- 线性与非线性系统性质比较

线性系统	非线性系统
解具有叠加性	解不具有叠加性
系统不改变输入信号的频率	输入信号经过该系统会出现倍频，差频等等新的频率
给定初始条件，系统行为可以预测	给定初始条件，系统行为也不可预测，出现混沌（chaos）

解的叠加性

- 例如： $m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$，方程具有两个解 $\begin{cases} x(t)=\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ x(t)=\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \end{cases}$
- 可以验证 $x(t)=A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$，也是方程之解。
- 然而， $m\frac{d^2x}{dt^2}+k\sin x=0$，如果方程有两个解： $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，则 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ 不是方程的解。
- 因为： $\sin(x_1+x_2)=\sin(x_1)\cos(x_2)+\sin(x_2)\cos(x_1)$



$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega^2\sin\theta$$

大角度时候的方程即为非线性方程

输入频率的改变：倍频

$x = \sin(\omega t)$ → $f(x) = ax + b$ → $x' = a\sin(\omega t) + b$

输入信号　　线性转换系统　　输出信号

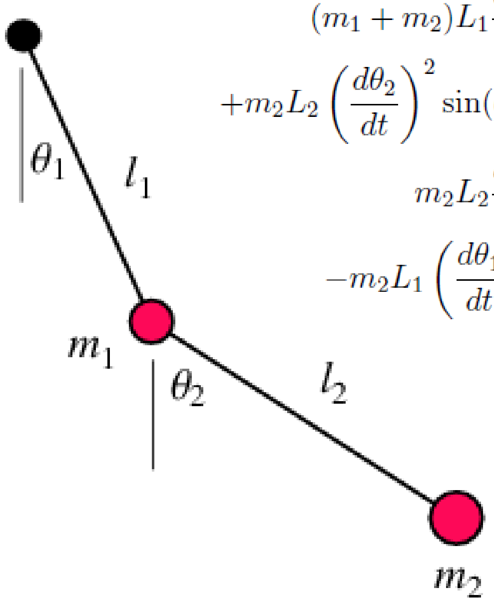
$x = \sin(\omega t)$ → $f(x) = ax^2 + b$ → $x' = a\sin^2(\omega t) + b$

$$= a\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} + b$$

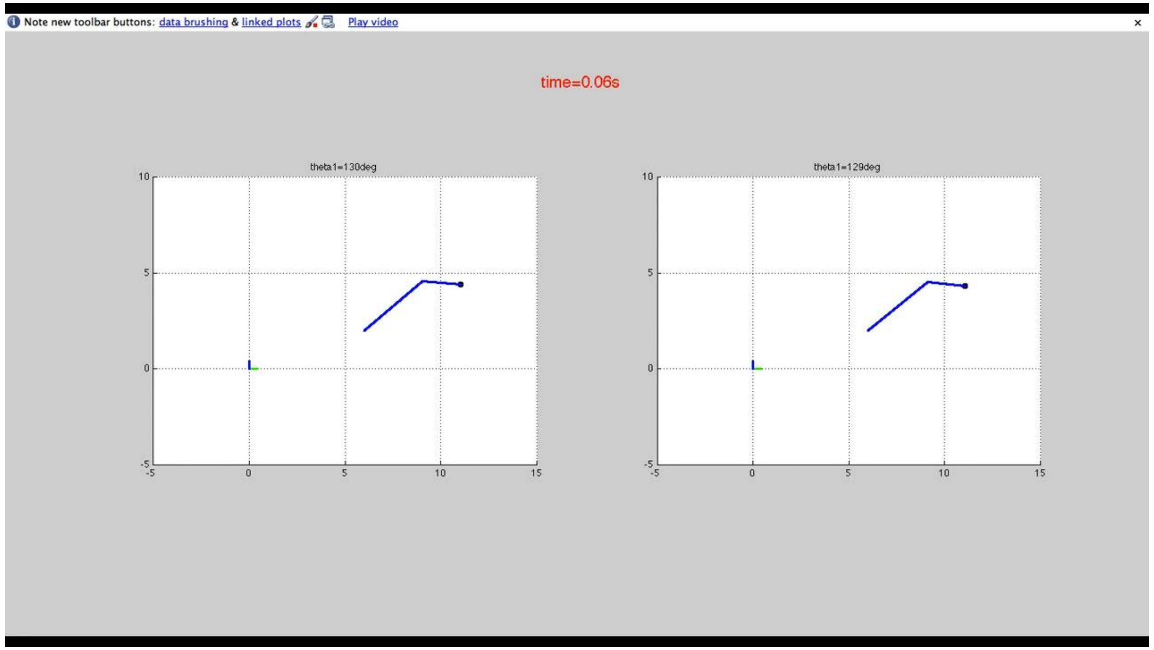
输入信号　　非线性转换系统　　输出信号

混沌

正是由于非线性系统的解不具有叠加性，并对系统中信号的频率有复杂的改变等效应，使得非线性系统的行为出现不可预测性，对初始条件微小的改变，将会对结果产生极大的影响——蝴蝶效应。



$$(m_1+m_2)L_1\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+m_2L_2\frac{d^2\theta_2}{dt^2}\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$+m_2L_2\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g(m_1+m_2)\sin(\theta_1)=0$$
$$m_2L_2\frac{d^2\theta_2}{dt^2}+m_2L_1\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$-m_2L_1\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2\sin(\theta_1-\theta_2)+m_2g\sin(\theta_2)=0$$



运动学方程：θ_1, θ_2不是小量时-非线性方程

刻画混沌

如何刻画混沌？

Lyapunov指数： $|\delta\mathbf{Z}(t)| \approx e^{\lambda t}|\delta\mathbf{Z}_0|$

相空间中可无限接近的两条轨迹的分离速率

Lyapunov指数λ通常是一个维数与像空间相同的谱

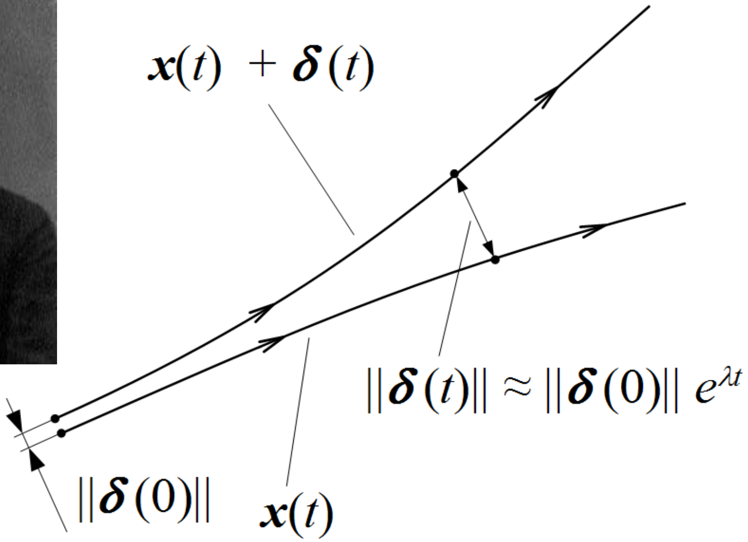
当$\lambda_{\max} > 0$，系统通常是混沌的

Lyapunov时间： $t \sim 1/\lambda_{\max}$

系统可预测的极限时间，混沌的开始

量子混沌： $\lambda_{\max}$ 有上界，$\lambda \leq 2\pi k_B T/\hbar$

极值在黑洞视界附近可得到



System	Lyapunov time
Solar System	5 million years
Pluto's orbit	20 million years
Obliquity of Mars	1–5 million years
Orbit of 36 Atalante	4,000 years
Rotation of Hyperion	36 days
Chemical chaotic oscillations	5.4 minutes
Hydrodynamic chaotic oscillations	2 seconds
1 cm^3 of argon at room temperature	3.7×10^{-11} seconds
1 cm^3 of argon at triple point (84 K, 69 kPa)	3.7×10^{-16} seconds

复摆的实验演示

國立中央大學

物理演示實驗室

National Central University

Physics Demonstration Lab.